

Innlevering ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist Mandag 31. august 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver: 5

Løsningsforslag

1

Uttrykk følgende komplekse tall både på kartesisk form som $a + bi$ og på polar form som $re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ og $0 \leq \theta < 2\pi$). Svarene skal gis eksakt

a) $23.54 - 23.54i$

b) $(1 - i)^2$

c) $e^{-1+\pi i/6}$

d) $(1 + \sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$

e) $\frac{-1 - i}{\sqrt{3} + i}$

LF:

a) Tallet er allerede på kartesisk form. På polar form er tallet gitt ved

$$23.54 \cdot \sqrt{2}e^{i7\pi/4}.$$

b) Vi ganger ut og får $(1 - i)^2 = -2i$. Dette er den kartesiske formen. Vi ser at vinkelen er $-\pi/2$. Legger vi til et helt omløp får vi $3\pi/2$ radian (vinkelen skal oppgis mellom 0 og 2π). Lengden er lik 2. På polar form er tallet gitt ved

$$2e^{3\pi i/2}.$$

c) På polarform er tallet gitt ved

$$\frac{1}{e}e^{\pi i/6}.$$

På kartesisk form er tallet gitt ved

$$e^{-1+\pi i/6} = e^{-1}(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)) = \frac{\sqrt{3}}{2e} + \frac{1}{2e}i$$

- d) Vi uttrykker begge faktorene på både kartesisk og polar form. Vi har at $(1 + \sqrt{3}i) = 2e^{\pi i/3}$ og $e^{3\pi i/4} = (-1 + i)/\sqrt{2}$. På kartesisk form er derfor $(1 + \sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$ lik

$$(1 + \sqrt{3}i)(-1 + i)/\sqrt{2} = (-1 - \sqrt{3})/\sqrt{2} + (1 - \sqrt{3})i/\sqrt{2}.$$

På polar form er $(1 + \sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$ lik

$$2e^{\pi i/3}e^{3\pi i/4} = 2e^{\pi i(1/3+3/4)} = 2e^{13\pi i/12}.$$

- e) På kartesisk form er

$$\frac{-1 - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(-1 - i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{(1 - \sqrt{3})i}{4}$$

Vi beskriver hver av faktorene på polar form og benytter dette til å finne kvotienten. Vi ser at $-1 - i = \sqrt{2}e^{5\pi i/4}$ og $\sqrt{3} + i = 2e^{\pi i/6}$. Dette gir at

$$\frac{-1 - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{2}e^{5\pi i/4}}{2e^{\pi i/6}} = (\sqrt{2}/2)e^{\pi i(5/4-1/6)} = (1/\sqrt{2})e^{13\pi i/12}.$$

Alternativt kunne vi benyttet resultatet i d).

2

Løs følgende likninger over \mathbb{C} (finn løsninger blant de komplekse tallene). Oppgi svarene eksakt.

a) $iz - \sqrt{3} = i$

b) $e^{\pi i/4}z + e^{\pi i/6} = 0$

c) $\frac{z - 1}{z + 1} = i$

d) $z = \frac{-\sqrt{3}i - 1}{z}$

e) $z^2 + (1 + i)z = -i$

f) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

LF: Eg har oppgitt svarene på den formen som eg syntes var enklest tilgjengelig. Om dere har oppgitt dem på en annen form er det helt greit så lenge det er riktige tall (og svaret er oppgitt eksakt og ikke bare som en tilnærmet løsning).

- a) Løsningen til likningen $iz - \sqrt{3} = i$ er

$$z = (i + \sqrt{3})/i = 1 - \sqrt{3}i$$

b) Løsningen til likningen $e^{\pi i/4}z + e^{\pi i/6} = 0$ er

$$z = -e^{\pi i/6}/e^{\pi i/4} = e^{\pi i} e^{\pi i(1/6-1/4)} = e^{11\pi i/12}.$$

Lengden til tallet i polar form skal være ikke-negativ. Derfor har vi uttrykt -1 som $e^{\pi i}$, tallet med lengde 1 og vinkel π radian.

c) Likningen $\frac{z-1}{z+1} = i$ er ekvivalent til $z-1 = i(z+1)$ så fremt $z+1 \neq 0$. Vi ganger ut og samler sammen ledd med z som en faktor på venstre side:

$$z(1-i) = 1+i$$

Derfor er løsningen

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i.$$

d) Løsningen til likningen $z = \frac{-\sqrt{3}i-1}{z}$ er det samme som røttene til

$$z^2 = -\sqrt{3}i - 1$$

(siden $z = 0$ ikke er en løsning). For å finne n -røtter er det hensiktsmessig å skrive om det komplekse tallet vi skal ta røttene av på polar form. Vi har at

$$-\sqrt{3}i - 1 = 2e^{4\pi i/3}$$

Vi finner én kvadratroten ved å la lengden være lik kvadratroten av lengden 2 og vinkelen være halvparten av $4\pi/3$. Den andre roten får vi ved å snu fortegnet til den første roten. Løsningene er derfor

$$\sqrt{2}e^{2\pi i/3} \text{ og } \sqrt{2}e^{5\pi i/3}$$

e) Likningen $z^2 + (1+i)z = -i$ er en annengradslikning. Løsningene kan vi finne fra annengradsformelen (kalles også abc-formelen). Det har ikke noe å si hvilke kvadratroter vi velger siden begge benyttes i formelen. Alternativt kan vi også finne løsningene direkte ved å fullføre kvadratet (det er slik annengradsformelen utledes). La oss benytte annengradsformelen. Likningen $z^2 + (1+i)z + i = 0$ har $a = 1$, $b = 1+i$ og $c = i$. Setter vi dette inn i annengradsformelen får vi

$$z = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot i}}{2 \cdot 1} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{2i-4i}}{2} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{-2i}}{2} = \frac{-(1+i) \pm (1-i)}{2}$$

Røtten er derfor $-i$ og -1 .

(Sett gjerne tallene inn i likningen og sjekket at de faktisk er løsninger.)

f) Likningen $\bar{z} = \frac{1}{z}$ er ekvivalent til

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1$$

(når $z \neq 0$). Løsningen er derfor alle komplekse tall med lengde 1 til origo. Dette er enhetssirkelen i det komplekse plan (med senter i origo).

Dette eksempelet viser at en "annengradslikning" i både z og dens konjugerte kan ha uendelig mange løsninger.

3

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av:

- 1) irreducible reelle polynomer og
- 2) lineære komplekse polynomer

a) $x^3 + 3x$

b) $z^6 + 8z^3$

c) $y^4 + 1$

Hint: I deloppgave c) er det kanskje enklest å først finne den komplekse faktoriseringen først og deretter benytte denne til å finne den reelle faktoriseringen.

LF: a) Vi har følgende faktorisering over de reelle tall:

$$x^3 + 3x = x(x^2 + 3).$$

Polynomet $x^2 + 3$ er irreducibelt over de reelle tall. Det må være irreducibelt fordi $x^2 + 3 \geq 3$ for alle x , så polynomet kan ikke være et produkt av to lineære ledd med reelle koeffisienter.

Over de komplekse tall faktoriserer alle polynomer som et produkt av lineære faktorer. Dette er fundamentalteoremet i algebra. Likningen $x^2 + 3 = 0$ har røttene $\pm\sqrt{3}i$. Faktoriseringsen over de komplekse tall der derfor gitt ved

$$x^3 + 3x = x(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i).$$

b) Vi har faktoriseringen $z^6 + 8z^3 = z^3(z^3 + 8)$. Vi ser (kanskje?) at -2 er en rot. Derfor er $z + 2$ en faktor. Polynomdivisjon gir følgende faktorisering

$$z^3(z + 2)(z^2 - 2z + 4).$$

Fullføring av kvadratet gir at $z^2 - 2z + 4 = (z - 1)^2 + 3 \geq 3$ for alle reelle z . Derfor er faktoriseringen over de reelle tall gitt ved

$$z^3(z + 2)(z^2 - 2z + 4).$$

Røttene til

$$z^2 - 2z + 4 = (z - 1)^2 + 3 = 0$$

er $z = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Over de komplekse tall er derfor faktoriseringen gitt ved

$$z^6 + 8z^3 = z^3(z + 2)(z - 1 - \sqrt{3}i)(z - 1 + \sqrt{3}i)$$

Alternativt kan vi finne røttene til $z^3 + 8 = 0$ og benytte dem til å faktorisere uttrykket. En rot har lengde $\sqrt[3]{8} = 2$ og vinkel $\pi/3$. De andre røttene finner vi ved å gange med 3-røtter av enhetselementet. Det er $1, e^{2\pi i/3}$ og $e^{4\pi i/3}$. Resultatet blir selvsagt det samme.

c) Uttrykket $y^4 + 1$ er positivt for alle reelle y . Det har derfor ingen reelle røtter og da heller ingen reelle faktorerer av grad 1.

En løsning til likningen $y^4 = -1 = e^{\pi i}$ er

$$e^{\pi i/4} = (1 + i)/\sqrt{2}.$$

De andre løsningene får vi ved å gange denne med enhetsrøtter av 1 (av grad 4). Disse er $1, i, -1, -i$. Faktoriseringen er derfor

$$y^4 + 1 = (y - (1 + i)/\sqrt{2})(y - (1 - i)/\sqrt{2})(y - (-1 + i)/\sqrt{2})(y - (-1 - i)/\sqrt{2}).$$

Dette er den komplekse faktoriseringen. Den reelle faktoriseringen får vi ved å gange sammen parvis konjugerte uttrykk. Resultatet er

$$y^4 + 1 = (y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y^2 - \sqrt{2}y + 1).$$

Dette er den reelle faktoriseringen av uttrykket. For mer detaljer se notatene fra 20. august.

Her er en alternativ måte å finne den reelle faktoriseringen uten bruk av komplekse tall. Ideen er å skrive om uttrykket som en differanse av to kvadrater og benytte konjugatsetningen

$$y^4 + 1 = (y^2 + 1)^2 - 2y^2 = (y^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y^2 - \sqrt{2}y + 1).$$

4

Bestem løsningene til likningssystemet

$$(2 + i)z - iw = 3$$

$$5z - (i - 1)w = 2 - i$$

LF: Her er det to ukjente og to variabler. Vi forventer én løsning.

Den utvida koeffisientmatrisen er

$$\begin{bmatrix} (2 + i) & -i & 3 \\ 5 & -(i - 1) & (2 - i) \end{bmatrix}$$

Vi utfører radoperasjoner. Først ganger vi rad 1 med i deretter legger vi til rad 1 ganget med $(i - 1)$ til rad 2:

$$\begin{bmatrix} (2i - 1) & 1 & 3i \\ 5 & -(i - 1) & (2 - i) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (2i - 1) & 1 & 3i \\ (4 - 3i) & 0 & -(1 + 4i) \end{bmatrix}$$

Her har vi benyttet at

$$3i(i - 1) + 2 - i = -1 - 4i \text{ og } (2i - 1)(i - 1) + 5 = -2 + 1 + 5 - 3i = 4 - 3i.$$

Dette gir at

$$z = \frac{-(1 + 4i)}{(4 - 3i)} = \frac{-(1 + 4i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{8 - 19i}{25}$$

Den andre likningen gir at

$$w = 3i - (2i - 1)z = 3i - \frac{(2i - 1)(8 - 19i)}{25} = \frac{75i - (35i + 30)}{25} = \frac{-6 + 8i}{5}$$

5

- a) En feil (som vi ser en del av i eksamensbesvarelsene) er å påstå at inversen til en sum $a + b$ er lik summen av inversen til a og b . Vis at dette faktisk aldri er sant for noen reelle tall. Med andre ord, vis at for reelle tall a og b (slik at $a \neq 0$, $b \neq 0$ og $a + b \neq 0$) så er alltid

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

- b) Beskriv alle komplekse tallpar a og b slik at

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

er sant (Det finnes uendelig mange slike tallpar).

Hint: Sammenhengen mellom a og b kan for eksempel uttrykkes som en annengradslikning i a med koeffisienter i b .

LF: Vi gjør deloppgavene samtidig. Vi går systematisk til verks og sammenlikner brøkene i likningen ved å finne felles nevner.

Likningen

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

er ekvivalent til likningen

$$\frac{ab}{ab(a+b)} = \frac{b(a+b)}{ab(a+b)} + \frac{a(a+b)}{ab(a+b)}$$

Dette er sant hvis og bare hvis

$$ab = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

under forutsetting at a , b og $a+b$ er ulik null. Denne likningen er ekvivalent til

$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$

Vi kan nå tenke på dette som en annengradslikning i variabelen a med koeffisienter uttrykt i b . (Eller omvendt selvsagt.)

Fullfører vi kvadratet (eller benytter annengradsformelen...) får vi

$$(a + b/2)^2 - (b/2)^2 + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4 = 0$$

Fra dette ser vi at det er ingen reelle tall (husk de må være ulik 0) som gjør dette sant. Det viser del a). Likningen har ingen reelle løsninger.

Det er derimot noen komplekse løsninger.

$$a + b/2 = \pm\sqrt{3}ib/2$$

Så vi har

$$a = b(-1 \pm \sqrt{3}i)/2 = be^{\pm\pi i/3}.$$

Siden a , b og $a+b$ må være ulik null er løsningene alle par at tall z og $ze^{\pi i/3}$ hvor z er ulik 0. Med andre ord løsningen er $(a, b) = (ze^{\pi i/3}, z)$ og $(a, b) = (z, ze^{\pi i/3})$ for $z \neq 0$.