Innlevering	ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 4
Innleveringsfrist	Mandag 12. oktober 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	$7+3$

Løsningsforslag

1

Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3\cos(2x-1) + 12$
LF: Vi benytter (lineær) kjerneregel og får

$$f'(x) = (3\cos(2x-1)+12)' = 3(-\sin(2x-1))(2x-1)' = \underline{-6\sin(2x-1)}$$

b) $f(x) = x^2 \sin(x)$
LF: Vi benytter produktregelen

$$f'(x) = (x^2\sin(x))' = \underline{2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$
LF: Vi benytter kjerneregelen

$$f'(x) = (\cos(\sin(x)))' = -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

d) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$
LF: Vi benytter produktregelen

$$f'(x) = (\cos(2x))'\sin(3x) + \cos(2x)(\sin(3x))' = \underline{3\cos(2x)\cos(3x) - 2\sin(2x)\sin(3x)}$$

e) Vi benytter kvotientregelen $f(x) = \sin(7x+1)/(\sin(-x)+x)$
LF:

$$f'(x) = \frac{(\sin(7x+1))'(\sin(-x)+x) - \sin(7x+1)(\sin(-x)+x)'}{(-\sin(x)+x)^2} =$$

$$\frac{7\cos(7x+1)(-\sin(x)+x) - \sin(7x+1)(-\cos(x)+1)}{(-\sin(x)+x)^2}$$

f) $f(x) = \sin(3x) + \sin(x) - 4\sin(x)\cos^2(x) - 1$

LF:

$$f'(x) = 3\cos(3x) + \cos(x) - 4((\sin(x))'\cos^2(x) + \sin(x)((\cos(x))^2)') - 0$$

$$3\cos(3x) + \cos(x) - 4(\cos(x)\cos^2(x) + \sin(x)2\cos(x)(-\sin(x))) =$$

$$\underline{3\cos(3x) + \cos(x) - 4(\cos^3(x) - 2\cos(x)\sin^2(x))}.$$

Dette er også lik $3\cos(3x) - 3\cos(x) + 12\cos(x)\sin^2(x)$.

g) $h(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

LF:

$$\underline{h'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x < 0 \\ 4x^3 & x \geq 0 \end{cases}}$$

Her har vi sjekket at den deriverte i "knekkpunktet", hvor vi skifter uttrykk, faktisk eksisterer og er lik 0.

Siden begge grensene

$$\lim_{k \to 0^+} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k \to 0^+} \frac{k^4 - 0}{k} = 0$$

og

$$\lim_{k \to 0^-} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k \to 0^-} \frac{-k^3 - 0}{k} = 0$$

eksisterer og er lik 0, så eksisterer grensen

$$\frac{d\,h(x)}{d\,x}\Big|_{x=0} = \lim_{k \to 0} \frac{h(k) - h(0)}{k}$$

og den deriverte til h i $x = 0$ er lik 0.

2

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ -x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

LF: Funksjonen er deriverbare vekk fra punktet $x = 1$. Den deriverte er gitt ved å derivere hvert av uttrykkene

$$h'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ -3x^2 & x > 1 \end{cases}$$

For at funksjonen skal kunne være deriverbar i $x = 1$ må den være kontinuerlig. Funksjonen h er kontinuerlig i $x = 1$ hvis

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = h(1) = \lim_{x \to 1^-} h(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} -x^3 = -x^3|_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} ax^2 + b$$

$$-1 = -1 = a + b$$

Anta dette er oppfylt slik at funksjonen er kontinuerlig. Da er den deriverte fra høyre $\lim_{x \to 1^+}(h(x) - h(1))/(x - 1)$ og fra venstre $\lim_{x \to 1^-}(h(x) - h(1))/(x - 1)$ gitt ved henholdsvis $-3x^2|_{x=1} = -3$ og $2ax|_{x=1} = 2a$. (Her benytter vi at funksjonen er kontinuerlig slik at $\lim_{x \to 1^-}(h(x) - h(1))/(x - 1)$ faktisk er lik $\lim_{x \to 1^-}(ax^2 + b - (a \cdot 1^2 + b))/(x - 1)$ siden $a \cdot 1^2 + b$ da er lik $h(1)$.)

Vi får at funksjonen er deriverbar presis når $a + b = -1$ og når $2a = -3$. Dette er et likningssett med to ukjente og to likninger. Løsningen er

$$\underline{a = -3/2} \quad \text{og} \quad \underline{b = 1/2}$$

3

Finn alle tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - x^2$ som er parallelle til linjen $y = 4x + 1$.

LF: En tangentlinje er parallell til $y = 4x + 1$ hvis og bare hvis $f'(x)$ er lik 4. Vi finner først den deriverte til $f(x)$ og bestemmer når den er lik 4. Den deriverte er lik

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2).$$

Likningen $f'(x) = 4$ er ekvivalent til $3x^2 - 2x - 4 = 0$. Løsningene er $x = (1 \pm \sqrt{13})/3$.

Tangentlinjene er

$$\underline{y = 4(x - (1 + \sqrt{13})/3) + f((1 + \sqrt{13})/3)} \quad \text{og} \quad \underline{y = 4(x - (1 - \sqrt{13})/3) + f((1 - \sqrt{13})/3)}.$$

Vi har at

$$f((1 \pm \sqrt{13})/3) = \frac{2(7 + \sqrt{13})(\pm\sqrt{13} - 2)}{27}.$$

4

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

LF: Setter vi $(3, 2)$ inn i uttrykket får vi

$$3^3 - 2^2 \cdot 3 - 2^4 + 7 = 27 - 12 - 16 + 7 = 0$$

så likningen er oppfylt for $(3,2)$ og punktet ligger i løsningsmengden til likningen.

Implisitt derivasjon gir

$$3x^2 - 2xy - x^2y' - 4y^3y' = 0.$$

Vi isolerer y' og får

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^3}$$

I punktet $(3,2)$ er derfor

$$\frac{dy}{dx}(3,2) = \frac{27 - 2 \cdot 3 \cdot 2}{3^2 + 4 \cdot 2^3} = \frac{15}{41}.$$

Tangentlinjen er gitt ved ettpunktsformelen

$$\underline{y = \frac{15}{41}(x-3) + 2}$$

Tegn gjerne kurven opp i geogebra, samt tangentlinjen. (Du behøver bare skrive inn likningen i geogebra. Forsøk gjerne førs med noe enklere som $x^2 + y^2 = 4$ for å forsikre deg om at det virker.)

5

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Invendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er 3/4 av høyden til kulen (det vil si 3/2 ganget med radius til kulen).

LF: Betegn radius til kulen med R. Den er oppgitt til å være 1 meter. Volumet til halve kulen er lik halve volumet til en kule

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} = 2.094m^3.$$

Det tar $60^2 s = 3600s$ å fylle opp halve kulen. Siden enringsraten er konstant er den lik gjennomsnittlig væskestrøm som er

$$2.094m^3/3600s = 0.0005817m^3/s = 0.5817dm^3/s.$$

($1m = 10dm$ så $1m^3 = 10^3 dm^3 = 1000dm^3$. En kubikkdesimeter kalles også en liter.)

La væskevolumet når væskeoverflaten har høyde h fra bunnen være $V(h)$. Vi har regnet ut at endringsraten til volumet med hensyn til tiden er

$$\frac{dV}{dt} = 0.5817dm^3/s$$

Vi benytter kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $V(h(t))$ og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Her har vi koblet sammen enringsratene til V og h. Hvis vi kan finne $\frac{dV}{dh}$ så kan vi fra første del av oppgaven også finne endringsraten til h med hensyn til tiden t.

Hadde vi hatt et uttrykk for $V(h)$ kunne vi ha derivert uttrykket og funnet $\frac{dV}{dh}$. Alternativt kan vi observere at endringsraten er lik tverrsnittarealet til figuren i høyde h. (Forskjelen ΔV mellom $V(h+\Delta h)$ og $V(h)$ er volumet til en tynn plate med tykkelse Δh og areal på bunnplaten lik tverssnittarealet til figuren i høyde h. I grensen Δh går mot 0 vil kvotienten $\Delta V/\Delta h$ være lik tverssnittarealet i høyde h.)

Tverrsnittarealet er arealet til en disk med radius $r(h)$ som da er $\pi r^2(h)$. Fra Pytagoras får vi at $r^2(h) + (h - R)^2 = R^2$. Når $h = 3R/2$ er derfor tverrsnittarealet lik

$$\pi(R^2 - (R/2)^3) = 3\pi R^2/4 = 2.356m^2 = 235.6dm^2.$$

Vi får dermed at

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}}. = \frac{0.5817dm^3/s}{235.6dm^2} = 0.00247dm/s = 0.247mm/s$$

6

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervallet. Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen monotonitester etc.

Forsøk med Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1 \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} - 2 \quad x \geq 0$

c) $\arctan(x) - x - 1 \quad$ alle x

d) $x^3 + 2x - 2 \quad$ alle x

LF: a) Den deriverte til funksjonen er $2x - 1$. Den deriverte er derfor (ekte) positiv i hele intervallet. Fra monotonitetstesten er den derfor økende. Funksjonen kan derfor ikke treffe x-aksen mer enn en gang. Siden funksjonen er kontinuerlig og verdiene i 1 og 2 er henholdsvis -1 og 1 så gir skjæringssetningen at det finnes ett nullpunkt i intervallet.

Vi benytter Newtons metode og finner estimatet <u>1.618</u>. (Det eksakte svaret er det gylne snitt $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803398875\ldots$.)

b) Den deriverte er $1/2\sqrt{x+1} + 1/(3(\sqrt[3]{x})^2)$. Dette er positivt når x er positiv. Det er ikke definert når $x = 0$. Funksjonen er kontinuerlig for alle $x \geq 0$. Videre er funksjonsverdiene i 0 og 8 lik henholdsvis -2 og 3. Ved skjæringssetningen har funksjonen derfor akkurat en rot. Et estimat med Newtons metode gir <u>0.4804</u>.

c) Den deriverte er lik

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Dette er negativt for alle x ulik 0. Det er lik 0 når x er lik 0. Derfor er funksjonen ekte avtagende og den har ikke mer enn ett nullpunkt. Funksjonen er kontinuerlig for alle x og videre er funksjonsverdien i -3 og 0 henholdsvis positiv og negativ. Ved skjæringssetningen er det derfor akkurat ett nullpunkt. Newtons metode gir oss følgende estimat $\underline{-2.132}$.

d) Den deriverte til $x^3 + 2x - 2$ er funksjonen $3x^2 + 2$, som alltid er positiv. Funksjonen kan derfor maksimalt ha ett nullpunkt. Siden funksjonsverdien i 0 er lik -2 og funksjonsverdien i 1 er lik 1 så finnes det ved skjæringssetningen akkurat ett nullpunkt mellom 0 og 1. Newtons metode gir oss estimatet $\underline{0.7709}$.

7

Finn alle lokale og globale maksimums- og minimumspunkt til funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & -2 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ x^3 - 2x^2 - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

LF: Denne funksjonen definert med delt forskrift kan dere tegne opp ved bruk av geogebra og kommandoen Dersom. Alternativt kan vi lage til funksjonen h som en funksjonsfil i matlab og plotte den.

Den deriverte er lik

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 1 \\ 3x^2 - 4x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Den deriverte er lik 0 når $x = 4/3$. De kritiske punktene er $x = 1$ (ikkje deriverbar), $x = 4/3$ (deriverte lik 0) og $x = 2$ (endepunkt). Vi sjekker verdiene der og får henholdsvis $-1, -59/27$ og -1. Funksjonen er avtagende fra -2 til 1 og fra 1 til $4/3$, den er stigende fra $4/3$ til 2. Punktet $(4/3, -59/27)$ er et globalt minimumspunkt. Punktene $(1, -1)$ og $(2, -1)$ er lokale maksimumspunkt. De er derimot ikkje globale maksimumspunkt. Funksjonen tar større verdier andre steder. For eksempel er $h(-1) = 0$. Funksjonen har ingen globale maksimumspunkt.

8

I denne oppgaven kan dere godt benytte halveringsmetoden. Løsningene skal finnes med en feil mindre enn 10^{-6}. Husk å benytte komandoen "format long" slik at dere får desimaltall med mange siffer i matlab.

a) Finn x-koordinaten til all punktene hvor grafen til 10^{x+1} og x^{10} møtes.

LF: Løsningene er nullpunktene til funksjonen $f(x) = 10^{x+1} - x^{10}$. En løsning ser vi er $x = -1$ siden $10^0 = 1^{10}$. Det er en annen løsning også. Vi finner den nummerisk til å være 1.9912433209. (Dette er ikkje heilt overraskende siden $10^3 = 1000$ og $2^{10} = 1024$.) Siden $10^3 - 2^{10} = -24$ og $f(x)$ blir positiv for store nok x finnes det en rot til. Vi finner den nummerisk (halveringsmetoden) til å være 8.067261.

b) Finn alle nullpunkt til funksjonen gitt ved uttrykket $\tan(x) + x - 1$ og med definisjonsmengde $[0, 10]$. (Vinkelen har enheten radianer.)

LF: Vi finner fire forskjellig nullpunkt.

$$0.4797310 \quad 2.2467913 \quad 4.9597574 \quad 7.9959595$$

9

Her skal dere benytte Newtons metode til å lage en kalkulator som regner ut kvadratrøtter. Dette er ganske realistisk i forhold til hvordan lommekalkulatorene faktisk regner ut kvadratrøtter. Vi tar utgangspunkt i funksjonen $f(x) = x^2 - a$. Det positive nullpunktet til $f(x)$ er $\sqrt{a}$ for $a > 0$. (Hvorfor er det et entydig nullpukt for $x \geq 0$?)

a) Vis at Newtons metode gir følgende rekursive formel for estimatet til nullpunktet (når vi starter med en positiv verdi for x)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

LF:

Vi har at $f'(x) = 2x$. Derfor er den rekursive formelen til Newtons metode gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n^2 - a - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Vi finner en felles nevener og får

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - a)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

b) Start gjerne med $x_0 = a$. Hvor mange iterasjoner ser det ut til at dere behøver for å regne ut kvadratroten med en nøyaktighet på minst 12 siffer? Test gjerne på et enkelt tilfelle, som $a = 4$, slik at det er lett å se hva som skjer. (Dere kan for eksempel lage en løkke i matlab som skriver ut de ulike verdiene til x_n rekursivt.)

c) Lag en matlab funksjon eller et skript som tar inn et tall og som gir ut kvadratroten til tallet (regnet ut ved den rekursive beskrivelsen ovenfor). Kall gjerne funksjonen rot. På hjemmesiden ligger en matlab funksjon som heter rot og som forøvrig regner ut en helt annen funksjon. Dere kan ta utgangspunkt i det skriptet og modifisere det hvis dere ønsker. (Dere trenger ikkje levere inn skriptet dere lager.)

LF:
Resultatet av å utføre iterasjonene noen ganger i matlab:

$$x_0 = 4 \quad x_1 = 2.5 \quad x_2 = 2.05 \quad x_3 = 2.000609756097561$$

$$x_4 = 2.000000092922295 \quad x_5 = 2.000000000000002$$

Det ser ut til at 5 iterasjoner er tilstrekkelig for å få en nøyaktighet på 12 siffer. Vi kan også regne på nøyaktigheten. Detaljene er tilgjengelige i notatet for M1000 våren 2015

Hvis $x_n = \sqrt{a}+h$, så h er avviket fra eksakt løsning, da er $x_{n+1} = \sqrt{a}+h^2/(2\cdot(\sqrt{a}+h))$, så neste avvik er

$$\frac{h^2}{2\cdot(\sqrt{a}+h)}$$

Så lenge avviket er positivt vil det altså fortsette å være positivt og neste avvik er mindre enn $h^2/(2\sqrt{a})$. Når $a \geq 1$ og h er liten vil altså avviket ved hver iterasjon kvadreres (og halvares). Et avvik på 10^{-3} blir ved neste iterasjon mindre enn 10^{-6} og deretter mindre enn 10^{-12} etc. Med andre ord hvis avviket er lite vil det etter få iterasjoner blir ekstremt lite. Problemet er å få et estimat slik at avviket er ganske like. Hvis avviket ikke er lite (men positivt) vil vi bare ha at

$$\frac{h^2}{2\cdot(\sqrt{a}+h)} < h/2$$

så avviket vil omtrentlig halveres ved hver iterasjon. Dette er tilsvarende halveringsmetoden.

Det er derfor viktig å finne rimelig nære startverdier for iterasjonen. En metode vil være å skrive et tall som et tall d mellom 1 og 4 ganget med 2^{2m} for et heltall m. Kvadratroten er da lik $\sqrt{d}\cdot 2^m$. Det er derfor tilstrekkelig å finne kvadratrøtter til tall mellom 1 og 4. Vi har sett at 4, som er tilfellet hvor avstanden mellom a og $\sqrt{a}$ er størst, vil kreve ca 6 iterasjoner med Newtons metode.

Vi vil derfor forsøke å lage en kalkulator som først skriver et tall på formen $d\cdot 2^2m$ og deretter benytter Newtons metode til å finne kvadratroen til d ved å starte med verdien d. Vi vil implementere første steg ved å sjekke om tallet er større enn eller lik 1 eller mindre enn 1. I første tilfelle deler vi med 4 til vi får et tall mindre enn eller lik 1 og i andre tilfelle ganger i med 4 til vi får et tall større enn eller lik 1. Vi vil også sjekke om tallet er positivt. Hvis ikke tar vi absoluttverdien og regner ut roten. Når vi skriver ut tallet til slutt ganger vi da med basis for de imaginære talllene, i.

Det er lagt ut to kvadratrot kalkulatorer. ezrot utfører bare Newtons metode. Den andre rot er litt mer forsegjort og implementerer algoritmen ovenfor. Husk å sette inn tallet som det skal tas rot av i parenteser etter funksjonsnavnet rot(5) etc.

10

Her er et standard eksempel som viser at den deriverte ikke alltid trenger være en kontinuerlig funksjon. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2\sin(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

er deriverbar i alle punkt, men at den deriverte ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

(Det er et resultat at diskontinuitetene til den deriverte må være en essensielle diskontinuiteter. Det finnes ikke en funksjon som har en derivert funksjon med hopp-diskontinuitet.)

LF: Fra definisjonen av den deriverte er $f'(0) = 0$: Den høyrederiverte er lik

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\sin(1/h)}{h} = 0$$

og den venstrederiverte er opplagt lik 0. Den deriverte til $x^2 \sin(1/x)$ er $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Derfor er f deriverbar i alle punkt og

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

Denne funksjonen er ikke kontinuerlig i 0 siden $\lim_{x \to 0^+} \cos(1/x)$ ikke eksisterer.