Innlevering ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
Obligatorisk innlevering 5
Innleveringsfrist Mandag 26. oktober 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:

Løsningsforslag

1

Finn de ubestemte integralene

a)

$$\int 2x - 3 - 4/x \, dx$$

LF:

$$\int 2x - 3 - 4/x \, dx = \underline{x^2 - 3x - 4\ln|x| + C}$$

b)

$$\int -2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1} \, dx$$

LF: Vi utfører polynomdivisjon

$$\int -2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1} \, dx = \int -2x^{3/5} + \frac{1}{2} + \frac{-1/2}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{-2x^{8/5}}{8/5} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{2}\frac{\ln|2x+1|}{2} + C = \underline{\frac{-5x^{8/5}}{4} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{4}\ln|2x+1| + C}$$

c)

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3} \, dx$$

LF: Vi benytter substitusjon med $u = 3x^3$

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3} \, dx = \underline{\frac{-\pi}{9} e^{3x^3} + C}$$

d)

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}} \, dt$$

LF: Vi forsøker med substitusjonen $u = 3t + 2$. Da er $t = (u-2)/3$ og $dt = du/3$.

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}} \, dt = \int \frac{(u-2)/3}{\sqrt[3]{u}} \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{9} \int u^{2/3} - 2u^{-1/3} \, du$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}u^{5/3} - 3u^{2/3}\right) + C = \underline{\frac{(3t+2)^{5/3}}{15} + \frac{-(3t+2)^{2/3}}{3} + C}$$

2

En beholder er konstruert som rotasjonslegemet om y-aksen av grafen til funksjonen $y = x^{2/3}$ for x mellom 0 og 10. Bestem volumet til en væske som fyller beholderen til en høyde h.

Hint: Endringsraten til volumet med hensyn til høyden dV/dh er gitt ved tverrsnittarealet ved høyde h. Finn et uttrykk for dette som en funksjon av høyden h. Benytt så integrasjon til å finne $V(h)$.

LF: Volumet til væsken ved høyde h er en funksjon $V(h)$. For høyden y mellom 0 og $H = 10^{2/3} \simeq 4.64158$ er endringsraten $V'(y)$ lik det horisontale tverrsnittarealet ved høyde h. Dette arealet er lik pi ganget med radius $x(y)$ kvadrert. Siden $y = x^{2/3}$ så er x uttrykt ved y gitt ved $x = y^{3/2}$. Derfor har vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = \pi(y^{3/2})^2 = \pi y^3$$

Vi kan integrere med hensyn til høyden for å finne $V(h)$. Ved bunnen av beholderen er volumet lik 0 så r $V(0) = 0$. Vi har derfor at

$$V(h) = V(h) - V(0) = \int_0^h \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = \int_0^h \pi y^3\,\mathrm{d}y = \underline{\pi h^4/4}$$

for $0 \leq h \leq 10^{2/3}$.

3

Et legeme beveger seg langs en rett vei. Hastigheten i et gitt tidspunkt er gitt som følger

a)

$$v(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 15 - 3x & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

b) $x^2 - 3x + 1.25$ for x mellom 0 og 3.

Vi skiller gjerne mellom fart og hastighet. Hastigheten (eng. velocity) er vektoren med både retning og størrelse, mens farten er størrelsen til hastigheten (eng. speed). (I dagligtale skilles det gjerne ikkje mellom begrepene.)

Bestem følgende i hvert av de to tilfellene: Distanse kjørt (differansen mellom start og sluttpunkt). Distanse tilbakelagt (hvor lang strekning bilen har kjørt). Bestem gjennomsnitsfarten og gjennomsnithastigheten.

LF: Siden vi beveger oss langs en rett linje er det bare to retninger, represetnert ved fortegnet, til hastigheten. Farten er absoluttverdien til hastighetsfunksjonen. (Vi benytter ikkje enheter i denne oppgaven.)

I del a) er hastigheten postiv eller null hele tiden så forflyttingen er lik totaldistanse tilbakelagt (med retning gitt ved positiv retning til koordinatsystemet).

Distansen tilbakelagt er lik

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^3 2x\,\mathrm{d}x + \int_3^5 15 - 3x\,\mathrm{d}x =$$

$$[x^3/3]_0^2 + [x^2]_2^3 + [15x - 3x^2/2]_3^5 =$$

$$8/3 + 9 - 4 + 30 - 24 = 41/3$$

Gjennomsnitlig fart er derfor $\underline{(41/3)/5 = 41/15 \simeq 2.73}$. Gjennsomsnitlig hastighet er tilnærmet lik 2.73 i positiv retning.

b) Her vil hastigheten både være positiv og negativ. Distansen tilbakelagt er lik

$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 1.25|\,\mathrm{d}x$$

Distansen forflyttet er lik

$$\int_0^3 x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x$$

Vi finner ut hvor $v(x) = x^2 - 3x + 1.25$ er positiv og negativ. Nullpunktene er løsningene til likningen

$$x^2 - 3x + 1.25 = 0$$

De er

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{2} = \frac{3 \pm 2}{2}$$

Nullpunktene er $x = 1/2$ og $x = 5/2$. Siden grafen til $x^2 - 3x + 1.25$ er en parabel som vender oppover vet vi at $v(x)$ er positiv mellom 0 og 1/2 samt mellom 5/2 og 3. Mellom 1/2 og 5/2 er $v(x)$ negativ.

Vi evaluerer (regner ut) integralene

$$\int_0^3 x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x =$$

$$x^3/3 - 3x^2/2 + 1.25x|_0^3 = 27/3 - 27/2 + 3.75 = -4.5 + 3.75 = -0.75$$

$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 1.25|\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{1/2} x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{5/2} x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x + \int_{5/2}^3 x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^3 x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x - 2\int_{1/2}^{5/2} x^2 - 3x + 1.25\,\mathrm{d}x =$$

$$-0.75 - 2[x^3/3 - 3x^2/2 + 1.25x]_{1/2}^{5/2} = -0.75 - 2[124/(3\cdot 8) - (3/2)(24/4) + 2.5]$$

$$= -0.75 + 3 - 1/3 = 2.25 - 1/3 = 1 + 11/12 = 1.91666\ldots$$

Gjennomsnittsfarten er $0.63888\ldots$. Gjennomsnitshastigheten er -0.25 (størrelsen er 0.25 og retningen er i negativ retning i koordinatsystemet).

4

I denne oppgaven kan dere benytte nummeriske metoder både til å finne skjæringspunkt og til å evaluere integraler (hvis nødvendig).

1. Bestem arealet til legemet avgrenset av grafene til $(x-1)/3$ og $\ln(x)$.

   LF: La $f(x) = \ln(x) - (x-1)/3$. Da er $f'(x) = 1/x - 1/3$. Funksjonen er avtagende for $0 < x < 3$ og økende for $x > 3$. Funksjonen er kontinuerlig, den har derfor maksimalt to nullpunkter. Det er opplagt at $x = 1$ er et nullpunkt. Vi benytter Newtons metode (eller halveringsmetoden) til å finne enda et nullpunkt til. Det er tilnærmet lik 6.71144108. Arealet avgrenset av grafene til de to funksjonene er gitt ved integralet av $f(x)$ mellom de to nullpunktene. Det er tilnærmet lik

   $$\int_1^{6.71144108} \ln(x) - (x-1)/3 \, \mathrm{d}x = x\ln(x) - x - (x-1)^2/6|_1^{6.71144108} =$$

   $$6.71144108(\ln(6.71144108) - 1) + 1 + (6.71144108 - 1)^2/6 = \underline{1.62913248\ldots}$$

2. Bestem volumet til legemet som fremkommer ved å rotere om x-aksen regionen avgrenset av grafene til funksjonene e^{x^2} og e^{2x}.

LF: De to grafene skjærer hverandre når $e^{x^2} = e^{2x}$. Dette skjer presis når eksponentene er like $x^2 = 2x$. Så $x = 0$ og $x = 2$. Området avgrenset av grafene er regionen mellom grafene fra $x = 0$ til $x = 2$. I dette området er e^{2x} størst så volumet er lik

$$\pi \int_0^2 (e^{2x})^2 - (e^{x^2})^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$\pi \int_0^2 e^{4x} - e^{2x^2} \, \mathrm{d}x$$

Det finnes ingen elementær funksjon som er antiderivert til (andre leddet i) integranden. Vi benytter numerisk integrasjon og finner at volumet er tilnærmet lik $\underline{1074.3288624}$.

5

Finn de bestemte integralene (eksakt)

a)

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$$

LF: Vi benytter substitusjonen $u = x^2 + 1$. Da er $du = 2xdx$.

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{1/2}{\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^{-1/2} \, du = u^{1/2}|_1^5 = \underline{\sqrt{5} - 1}$$

b)

$$\int_{-2}^{2} \sin(x^3) + \cos^2(x)\,dx$$

Hint: Integralet fra $-a$ til a av en odde (integrerbar) funksjon er 0.

LF: Siden $\sin(x^3)$ er en odde (integrerbar) funksjon så er integralet $\int_{-2}^{2} \sin(x^3)\,dx = 0$. Integralet vårt er derfor lik

$$\int_{-2}^{2} \cos^2(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\,\Big|_{-2}^{2} = \underline{\frac{\sin(4)}{2} + 2}$$

Her har vi benyttet en trigonometrisk likhet for å skrive om integranden slik at det blir lettere å finne en antiderivert.

c)

$$\int_{0}^{2} \ln(x)\,dx$$

Dette er et uegentlig integral. Funksjonen $\ln(x)$ går mot $-\infty$ når x nærmer seg 0 fra positiv side. Integralet er lik

$$\lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{2} \ln(x)\,dx$$

Delvis integrasjon med $1 \cdot \ln(x)$ hvor u' settes lik 1 og $v = \ln(x)$ gir

$$\int_{a}^{2} \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x|_{a}^{2} = 2\ln(2) - 2 - a\ln(a) + a$$

Grensen

$$\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = 0$$

siden $\ln(x)$ går mot $-\infty$ mye saktere enn a går mot 0. Integralet er derfor lik

$$\lim_{a\to 0^+} 2\ln(2) - 2 - a\ln(a) + a = -2(1 - \ln(2)) = -0.6137056\ldots$$

6

1. Finn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere regionen mellom x-aksen og grafen til

$$2 - \sqrt{1 - x^2}$$

fra $x = 0$ til $x = 1$, om y-aksen.

Hint: Hvordan ser legemet ut?

LF: Legemet ser ut som en sylinder med radius 1 og høyde 2 hvor det er freset ut en halvkule med radius 1 i toppen. Volumet er derfor lik

$$\pi \cdot 1^2 \cdot 2 - 2\pi/3 = \underline{4\pi/3}$$

Vi kan og benytte skivemetoden til å finne volumet. Da får vi at volume er

$$\int_{0}^{1} 2\pi x \cdot (2 - \sqrt{1 - x^2})\,dx = 2\pi(x^2 + (1 - x^2)^{3/2}/3\;|_{0}^{1}) = 4\pi/3$$

2. Finn buelegden til kurven gitt ved $g(x) = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$. Er svaret du får rimelig? Bruk gjerne numerisk integrasjon.

   Buelengden er lik

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

   Den rette linjen fra start til slutt-punkt har lengde

$$\sqrt{1 + (\sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{2})^2} = 1.78797016.$$

   Dette gir et nedre estimat for buelengden.

   Nummerisk integrasjon gir (her er Simpsons metode benytta med 10000 delintervaller

$$\underline{L \approx 2.0034971116273}.$$

Eg hadde opprinnelig bare tenkt at denne siste deloppgaven skulle løses numerisk. Men noen av dere har påpekt at det går fint å finne en antiderivert som en elementær funksjon.

Eg viser hvordan man kan finne de antideriverte. Vi benytter en generell a i stede for tallet 2 i eksponenten

$$\int \sqrt{1 + e^{ax}}\, dx$$

Vi benytter substitusjonen $u = 1 + e^{ax}$. Da er $u' = ae^{ax} = a(u - 1)$. Integralet blir omgjort til

$$\int \frac{\sqrt{u}}{a(u-1)}\, du$$

Vi fjerner roten ved å benytte substitusjonen $v = \sqrt{u}$ eller $u = v^2$. Da er $du = 2vdv$ og vi får

$$\int \frac{v}{a(v^2-1)} 2vdv = \int \frac{2v^2}{a(v^2-1)}\, dv =$$

Vi benytter polynomdivisjon samt delbrøksoppspalting

$$\frac{2}{a} \int 1 + \frac{1}{v^2 - 1}\, dv = \frac{2}{a} \int \left(1 + 1/2 \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)\right) dv =$$

$$\frac{2}{a}\left(v + 1/2 \ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right) + C$$

Vi uttrykker v ved hjelp av x som $v(x) = \sqrt{1 + e^{ax}}$ og får

$$\int \sqrt{1 + e^{ax}}\, dx = \frac{2}{a}\sqrt{1 + e^{ax}} + \frac{1}{a} \ln\left|\frac{\sqrt{1 + e^{ax}} - 1}{\sqrt{1 + e^{ax}} + 1}\right| + C$$