Innlevering	ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 6
Innleveringsfrist	Mandag 9. november 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	5

Løsningsforslag

1

Beskriv alle løsningene til differensiallikningssystemene nedenfor.

a)

$$y' - 3y = \cos(x) \qquad y(0) = 1$$

LF : Dette er en første ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Likningen er av orden 1 og det er en randbetingelse.

De homogene løsningene (løsningene til likningen $y' - 3y = 0$) er $y = Ae^{3x}$ for konstanter A. Vi finner nå en partikulær løsning. Det vil være realdelen av en løsning til $y' - 3y = e^{ix}$. Vi forsøker med en funksjon på formen $y = Ke^{ix}$. Setter vi den inn får vi

$$(i-3)Ke^{ix} = e^{ix}$$

Dette gir

$$K = \frac{1}{i-3} = \frac{i+3}{-10} = -\frac{i+3}{10}$$

En partikulær løsning er derfor

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{i+3}{10}(\cos(x) + i\sin(x))\right) = (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Løsnignene er derfor på formen

$$y(x) = Ae^{3x} + (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Vi løser nå randverdiproblemet. Kravet $y(0) = 1$ gir $A - 3/10 = 1$, så $A = 13/10$. Løsningen til randverdiproblemet er

$$\underline{y(x) = (13e^{3x} + -3\cos(x) + \sin(x))/10}$$

b)

$$y'(2x-3) = 4x^2y^2 \qquad y(2) = 1/10$$

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Vi samler faktorer som er funksjoner bare av y på venstre side og faktorer som er funksjoner av x på høyre side av likhetstegnet.

$$\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int \frac{4x^2}{2x-3}\,dx$$

For å gjøre det enklere å løse integralet til høyre utfører vi polynomdivisjon

$$\frac{4x^2}{2x-3} = 2x+3+\frac{9}{2x-3}$$

Vi finner de antideriverte og får

$$-\frac{1}{y} = x^2+3x+4.5\ln|2x-3|+C$$

Vi løser randverdiproblemet: Setter vi inn $x=2$ og $y=1/10$ får vi

$$-10 = 4+6+4.5\cdot\ln 1 + C = 10+C,$$

så $C=-20$. Løsningen er

$$y(x) = \frac{-1}{x^2+3x+4.5\ln|2x-3|-20}$$

c)

$$y'+3x^5 = 2x^2y \qquad y(0)=2$$

Dette er en førsteordens linær differensiallikning. Vi benytter integrerende faktorer

$$(y'-2x^2y)e^{-2x^3/3} = (y\cdot e^{-2x^3/3})' = -3x^5e^{-2x^3/3}$$

Vi integrerer og får

$$y\cdot e^{-2x^3/3} = \int -3x^5e^{-2x^3/3}\,dx = \int -3(-3u/2)(-1/2)e^u\,du = -9/4(ue^u-e^u)+C$$

hvor vi har benyttet substitusjonen $u=-2x^3/3$. Den deriverte til u er lik $-2x^2$. Dette gir

$$y = e^{2x^3/3}(-9/4((-2x^3/3)e^{-2x^3/3}-e^{-2x^3/3})+C) = \underline{3x^3/2+9/4+Ce^{2x^3/3}}$$

d)

$$y''-5y'+8y-4=0$$

En partikulær løsning er $y=1/2$. Vi finner nå de homogenen løsningene ved å anta at $y=e^{rx}$. Vi får da at

$$(r^2-5r+8)e^{rx}=0$$

Løsningene er

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

De homogene løsningene er derfor $e^{5x/2}(A\cos(\sqrt{7}x/2) + B\cos(\sqrt{7}x/2))$. Vi kombinerer dette med den partikulære løsningen og finner løsningenen til differensiallikningen

$$y(x) = \underline{1/2 + e^{5x/2}(A\cos(\sqrt{7}x/2) + B\cos(\sqrt{7}x/2))}$$

Benytt Eulers metode til å finne estimat til løsningen av randverdiproblemene. Forsøk med forskjellig steglengder og undersøk hvor nøyktig estimatene blir.

Dere kan benyte matlab programmet Eulerm.m til å finne tilnærma løsning til differensiallikningenen.

2

Vi skal studere bevegelsen til et objekt som faller i et konstant gravitasjonsfelt når vi tar hensyn til luftmotstanden. Vi velger positiv retning til å være nedover (i samme retning som gravitasjonskraften).

Anta at luftmotstand er proporsjonal til kvadratet til farten. La proporsjonalitetskonstanten til luftmotstanden for vårt objekt være l. Luftmotstanden er da lik $-lv^2$, hvor $v(t)$ er farten ved tiden t.

Vi antar at legemet slippes fra en veldig stor høyde så det tar en stund før det treffer bakken.

1. Vis at farten tilfredstiller differensiallikningen

   $$mv' = mg - lv^2$$

   hvor m er massen og g er gravitasjonskonstanten.

   Vis at farten etter hvert vil stabilisere seg og nærme seg $V_0 = \sqrt{mg/l}$.

2. Løs differensiallikningen for farten $v(t)$. Finn løsningen som tilfredstiller initialkravet $v(0) = 0$. Dette vil si at legemet slippes og ikke kastes i tiden $t = 0$.

3. Hvor lang tid tar det fra et legeme slippes til de når 90% av farten V_0? (Vi antar dette skjer før legemet når bakken!)

4. Finn et uttrykk for distansen legemet har falt fra tiden $t = 0$ til tiden T. Vi antar også her at $v(0) = 0$. (Og selvsagt at legemet ikke har truffet bakken ved tiden T.)

Hvis det er behov for hjelp kan dere sjekke forelesningen 18. april 2013 på hjemmesiden til forkurs matematikk 2013.

LF: Se notatene ovenfor for et løsningsforslag. Notatene heter "Fall med luftmotstand" og ligger under uke 18.

3

Sett opp en differensiallikning for kurver gitt ved en funksjon $y(x)$ med følgende egenskaper: Kvadratet av stigningstallet til kurven i punktet $(x, y(x))$ er lik stigningstallet til linjen som går gjennom origo og punktet $(x, y(x))$.

Løs differensiallikningen og finn løsningene.

Betingelsene til kurven sier at

$$(y')^2 = \frac{y}{x}.$$

Dette er en separabel differensiallikning. Vi separerer variablene og integrerer

$$\int \frac{y'}{\sqrt{y}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$

Løsningene er derfor på formen

$$y(x) = \underline{(\sqrt{x} + C)^2}$$

for konstanter C.

4

Gjør oppgave 5 i eksamen februar 2014 (oppgavene ligger på hjemmesiden til kurset).

5

Gjør oppgave 11 i eksamen august 2015 (oppgavene ligger på hjemmesiden til kurset).

Løsningsforslag til oppgave 4 og 5 ligger også på hjemmesiden til kurset.