11 feb 2015 Kap 9 Lineær algebra

(1) Lineære likningssystem

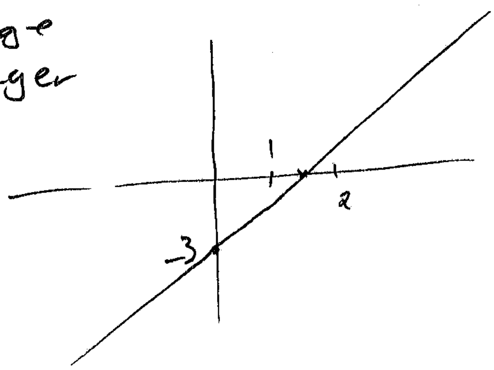
Eks En lineær likning

* $2x - 3 = 5$

Løsningen er $x = 4$ (alle x som gjør påstanden sann)

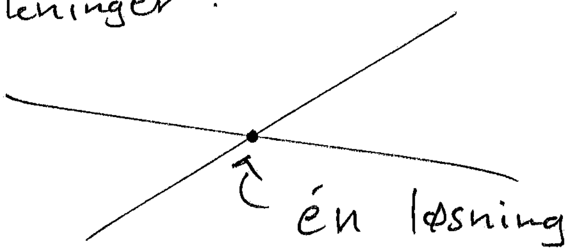
* $2x - y = 3$

mange løsninger



($y = 2x - 3$ funksjon, grafen er en linje)
(uendelig mange løsninger)

Lineært likningssystem:
Flere lineære likninger
2 variabler 2 likninger:
Typisk (generisk)



Ikke parallelle linjer

eks

$$2x - y = 3$$
$$x + y = -1$$

Løser likningene: Bytte plass

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned} \quad \cdot(-2) \quad \sim$$

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 0 - 3y &= 5 \quad \cdot \tfrac{-1}{3} \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} x + y &= -1 \\ 0 + y &= \tfrac{-5}{3} \end{aligned} \quad \cdot(-1) \quad \sim \quad \begin{aligned} x + 0 &= 2/3 \\ 0 + y &= -5/3 \end{aligned}$$

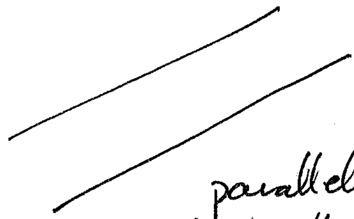
Løsningen er $x = 2/3$ og $y = -5/3$

②

eksempel

$$x - y = -1$$
$$x - y = 2$$

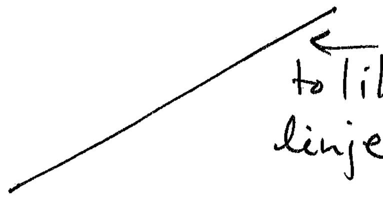
(Likning 1 trukket fra Likning 2 gir : $0 = 3$ aldri sant)



parallelle og forskjellige ~~e~~ ingen løsning!

$$x - y = 2$$
$$-2x + 2y = -4$$

(Likning 2 er Likning 1 $\times(-2)$)

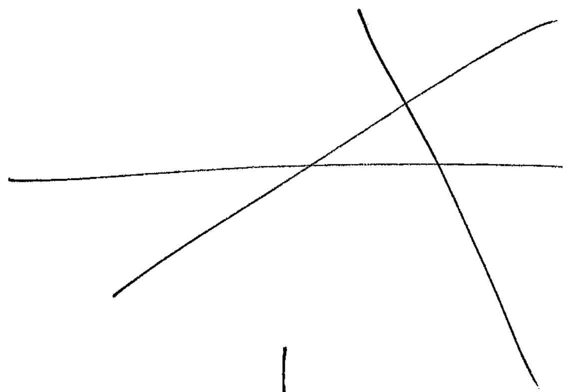


to like linjer

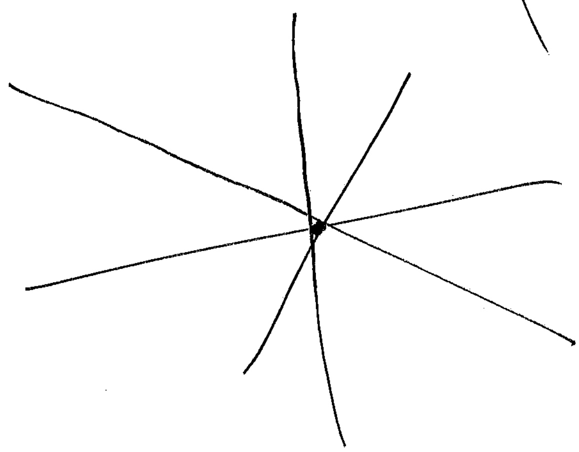
løsningsmengden er den felles linjen.

2 variabler
mer enn 2 likninger

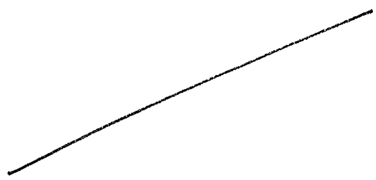
typisk
ingen løsning



én løsning



Uendelig
mange løsninge

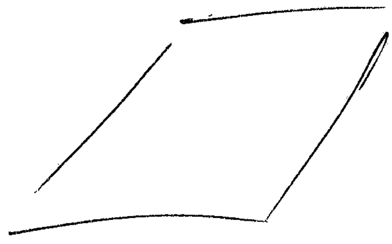


alle (løsnings) linjene er like.

3 variabler

$x + y + z = 12$

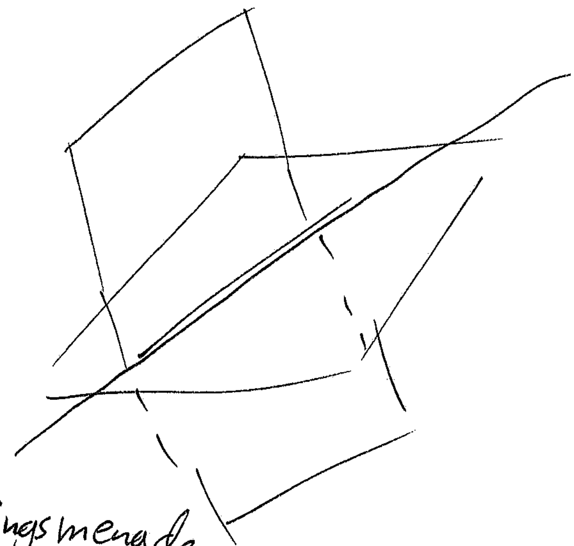
løsningsmengden er et plan i rommet



3

2 likninger : typisk :

løsningsmengden er en linje

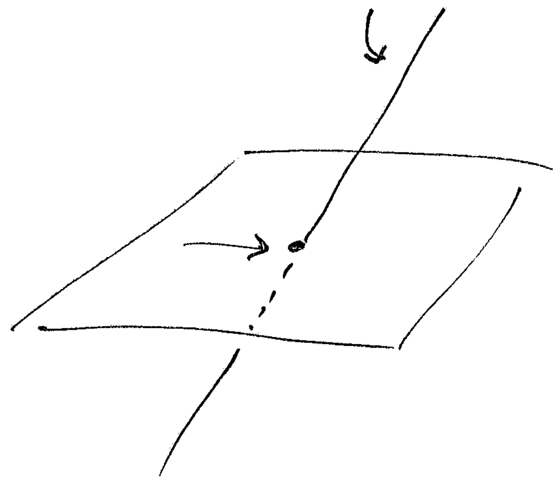


planene parallelle (forskjellige) : inkonsistent ingen løsning

planene like : Da er felles plan - løsningsmengden

3 likninger

typisk er løsningsmengden et punkt.



. . .

(4) Generelt lineært likningssystem med n variabler og m likninger

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Et lineært likningsystem har én løsning eller uendelig mange løsninger (konsistent), eller ingen løsning (inkonsistent).

<u>Koeffisient matrisen</u> til likningssystemet :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

RADER

KOLONNER

SØYLER

Utvida (koeffisient)matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

<u>Def:</u> Radoperasjoner

1) Bytte to rader
2) Skalere en rad (gange med $c \neq 0$)
3) Legge en rad til en annen rad (gjerne kombinert med 2))

Radoperasjoner utført på et likningssystem
5 gir et nytt likningssystem med samme løsningsmengde som det opprinnelige likningssystemet.

To lineære likningssystemer er <u>ekvivalente</u> hvis de er relaterte med radoperasjoner.

Vi skriver $\sim$ hvis matrisene er ekvivalente

Likningssystemet
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

har løsningsmengde $x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -7$

<u>Eksempel</u>

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ -6y &= 3 \end{aligned}$$

Utvida matrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right] {-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right] \cdot\left(\frac{-1}{6}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \cdot 3 \quad (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 5 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \text{bytt}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5 & -7/2 \end{array}\right] \frac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.7 \end{array}\right]$$

Løsningen er $\underline{x = 0.8} \quad \underline{y = -0.5} \quad \underline{z = -0.7}$

12.02.2015

6

Flere eksempler på Gauss-Eliminerte matriser

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$x = 1$

$z = 2$

y frivariabel

løsningene er $x=1$, $z=2$ og alle y.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x + 2z &= 3 \\ y + z &= 4 \end{aligned}$$

løsningene er en linje

en parametrisering er

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2z \\ y &= 4 - z \\ z &= z \end{aligned}$$

En matrise er på trappeform hvis:

- 0-rader (rader med bare 0-er) er nederst i matrisen
- Rader ulik 0-rader har 1 som ledende element (første element) (elementet lengst til venstre)
- De ledende elementene beveger seg mot høyre når vi beveger oss nedover matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ er på trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ er ikkje på trappeform

Resultat: Alle matriser er ekvivalent til en matrise på trappeform.

Redusert trappeform: Trappeform samt at alle kolonner som inneholder et førsteelement ellers bare består av 0-elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{redusert trappeform}$$

Alle matriser er ekvivalent til en matrise på redusert trappeform (på en entydig måte)

Gauss Eliminasjon er prosessen hvor vi benytter radoperasjoner til å finne en ekvivalent matrise på redusert trappeform.

Eksempel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} -4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot \frac{-1}{4} \end{matrix}$$

(trappeform)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -6 \quad -3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right]$$

redusert trappeform

Løsningene til likningssystemet

$x = -0.75$

$y = 0.5$

$z = 0.25$

Eksempel Beskriv alle polynomer p av grad 4 (eller lavere)

slik at punktene (0,0) og (1,1) ligger på

8 grafen og $p'(1) = 0$ og $p''(0) = 0$.

$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$p(0) = 0$: $p(0) = \underline{a_0 = 0}$

$p(1) = 1$: $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 1$

$$p'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$p'(1) = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$$

$$p''(x) = 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cancel{6}\, 3 \cdot 2 a_3 x + 2a_2$$

$$p''(0) = 12a_4 \cdot 0 + 6a_3 \cdot 0 + 2a_2 = \underline{2a_2} = 0$$

$a_0, a_2 = 0$

$a = a_1$

$a_4 + a_3 + a_1 = 1$

$4a_4 + 3a_3 + a_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_4 + a_3 = 1 - a \\ 4a_4 + 3a_3 = -a \end{pmatrix}$$ alternativ

⑨

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] -4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] \cdot(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Vi parametriserer løsningene med variabel a_1 $(=a)$

$$a_4 = -3 + 2a$$

$$a_3 = 4 - 3a$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = a$$

$$a_0 = 0$$

9.2 Matriser

$m \times n$ -matrisen $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

a_{ij} element i matrisen i posisjon (i,j)
i-te rad j-te kolonne
"i steg ned og j steg bortover".

$m=1$ $[a_1, \ldots, a_n]$ radvektor $1 \times n$-matrise

$n=1$ $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ søyle vektor (kolonne) $m \times 1$ matrise

Elementvis skalarmultiplikasjon og addisjon på matriser

$$-3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad 12\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 36 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$[1, 2] + [3, -4] = [4, -2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}}$$

meningsløst!
Vi kan bare legge sammen matriser med samme dimensjoner

(11)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transponering

$$[a_{ij}]^T = [a_{ji}]$$

$m \times n$ matrise transponert gir en $n \times m$ Matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

elementene i posisjon (i,j) flyttes over til posisjon (j,i)

Matrise $\underbrace{\text{ved}}_{}$ beskrevet hjelp av vektorer

$$M = \begin{bmatrix} \vec{s}_1 & \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} \vec{s}_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \dots & \vec{r}_m \end{bmatrix}$$

Transponering bytter mellom søyle og radvektorer.

Matrise multiplikasjon

(12)

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{s}_1 & \cdots & \vec{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{s}_n \end{bmatrix}$$

element (i,j) er $\vec{r}_i \cdot \vec{s}_j$ (skalar-produkt)

$(m \times k)$ $\overset{\text{matrise}}{\text{ganget}}$ med en $k \times n$ matrise giren $m \times n$ matrise

(Minner om prikk (skalar) produktet $[a_1, \dots, a_n] \cdot [b_1, \dots, b_n]$
$= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (ikkje kommutativ)

$$2x + 3y = 1$$
$$-3x + 5y = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ -3x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

0-matrisen $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alle elementene er lik 0.

(13)

$$\underset{m\times n}{M} + \underset{m\times n}{O} = M$$

matriser

<u>Identitetsmatrisene</u>

Kvadratiske matriser

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$$

elementene på diagonale $i=j$ er lik 1

alle andre elementer er lik 0.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $m \times n$ matrise

$$M \cdot I_n = M = I_m \cdot M$$