25.02.2015

9.3 Determinanter

① (Motivasjon) Løser et generelt 2x2 system

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Forsøker å løse ved radoperasjoner (Gauss eliminasjon)

y:
$$\left[\begin{array}{cc|c} ac & bc & c\cdot u \\ ac & ad & a\cdot v \end{array}\right]_{-1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} ac & bc & cu \\ 0 & ad-bc & av-cu \end{array}\right]$$

Så $y = \dfrac{av-cu}{ad-bc}$ antar $ad-bc \neq 0$

x: Likningssystemet er ekvivalent til $\left[\begin{array}{cc|c} ad & bd & du \\ bc & bd & bv \end{array}\right]_{-1}$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} ad-bc & 0 & du-bv \\ bc & bd & bv \end{array}\right]$$

Så $x = \dfrac{du-bv}{ad-bc}$

Løsningene er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$ad-bc$ kalles <u>determinanten</u> til $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Matrisen $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ er invers matrisen A^{-1}

til $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. : $A \cdot A^{-1} = 1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2)

$A^{-1} \cdot A = 1_2$

sjekker $A^{-1} \cdot A = 1_2$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1_2.$$

$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ganger A^{-1} fra venstre

$$A^{-1} \cdot A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}$$

Hvis $\det A = 0 \iff a \cdot d = bc \iff$

Vektorene $[a\ b]$ og $[c\ d]$ er lineært avhengige

(for eksempel $a \neq 0$: $\frac{c}{a}[a, b] = [c, \frac{b \cdot c}{a}] = [c, \frac{ad}{a}]$
$= [c, d]$.)

Typisk: $x + y = 1$
$2x + 2y = 3$ ingen løsning.

$x + y = 1$
$2x + 2y = 2$ uendelig mange løsninger (en linje)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \vec{0}$: Hele planet en løsning!

$\det A \neq 0 \iff A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ har én løsning.

Eksempler $\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot(-3)$

$= 4 - (-6) = \underline{\underline{10}}$

3

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - 0\cdot 2 = \underline{\underline{-12}}$$

$$\det\begin{bmatrix}i & 1+i\\ 1 & 1-i\end{bmatrix} = i(1-i) - 1\cdot(1+i)$$
$$i - i^2 - 1 - i = i + 1 - 1 - i = \underline{\underline{0}}$$

(1. rad $= i \cdot$ 2. rad)

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \det(1_2) = \underline{1}$$

Egenskaper til determinanter:

1. Bytter vi radene (eller søylene) så skifter determinanten fortegn

$$\left(\det\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix} = bc - ad = -(ad-bc) = -\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)$$

2. Determinanten er lineær i hver rad og kolonne

$$\left(\begin{vmatrix}a\cdot k & b\cdot k\\ c & d\end{vmatrix} = akd - b\cdot kc = k(ad-bc)\right.$$
$$= k\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c & d\end{vmatrix} = (a_1+a_2)d - (b_1+b_2)\cdot c$$
$$= (a_1d - b_1c) + (a_2d - b_2c)$$
$$\left.= \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ c & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ c & d\end{vmatrix}\right)$$

3. $\det(1_2) = 1.$

Determinanter er uendret under transponering.

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

bytter radevektorer til søylevektorer.

4

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

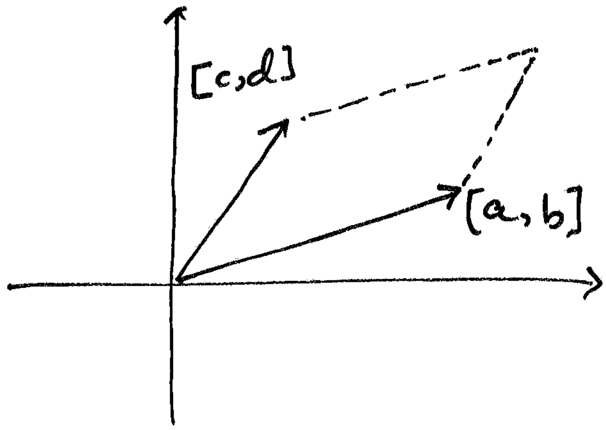
"speyler om diagonalen".

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T\right) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb$$
$$= ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\underline{\det(A^T) = \det(A)}$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

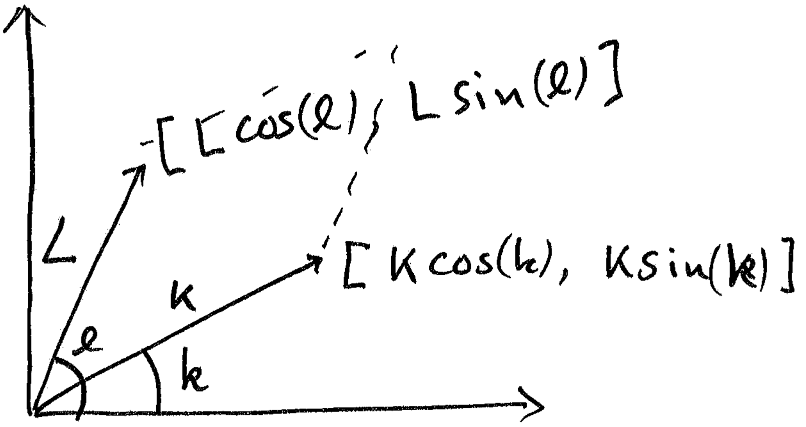
Geometrisk fortolkning av determinant av 2×2 matriser



Absoluttverdien til $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er lik arealet til parallellogrammet.

Vi viser dette ved bruk av addisjonsformelen for sinus.

(5)



$$\det\begin{bmatrix} K\cos(k) & K\sin(k) \\ L\cos(l), & L\sin(l) \end{bmatrix}$$

$$= KL\big(\underbrace{\cos(k)\sin(l) - \cos(l)\sin(k)}_{\sin(l-k)}\big)$$

Arealet til parallellogrammet er $KL\,|\sin(l-k)|$.
Dette gir resultatet.

Fortegnet til $\det\begin{bmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{bmatrix}$ er 1) positivt hvis vinkelen fra $\vec{u}$ til $\vec{v}$ er $\in \langle 0, \pi\rangle$

2) negativt hvis vinkelen fra $\vec{u}$ til $\vec{v}$ er $\langle -\pi, 0\rangle$.

De to vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har areal 0 $\Leftrightarrow \det A = 0$

- Ikke parallelle $\Leftrightarrow$ parallellogrammet har positivt areal $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Eksempel: Finn arealet til parallellogrammet utspent av $[-1, 2]$ og $[3, 4]$.

$$A = \left|\det\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right| = |(-1)\cdot 4 - 2\cdot 3| = |-10| = \underline{10}$$

Determinanter av $n \times n$ matriser
(vi har ikke determinanter for $m \times n$ matriser hvor $m \neq n$.)

6

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A$ er en skalar.

Egenskaper:

1) Determinanten er lineær i hver rad og søyle.
2) determinanten skifter fortegn når to rader byttes og når to søyler byttes.
3) Determinanten til enhetsmatrisen 1_n er lik 1. $\det 1_n = 1$.

$$1_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ søyler (kolonne)}} \quad n \text{ rader.}$$

$$\det A = \det A^T$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

A, B to $n \times n$ matriser

Notasjon

(7)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinanten til $(n-1)\times(n-1)$-matrisen hvor rad i og kolonne j er fjernet kalles ij minor til A. Elementet skrives M_{ij}

ij kofaktor til A er $(-1)^{i+j} M_{ij} = C_{ij}$

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & i+j \text{ jevn (partall)} \\ -1 & i+j \text{ odd} \end{cases}.$$

Kofaktormatrisen C har element i i,j gitt ved C_{ij}.

Den adjungerte til A er den transponerte til kofaktormatrisen

$$\operatorname{adj} A = C^T$$

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}.$$

Vi definerer determinanten til en $n\times n$-matrise fra determinanten til $(n-1)\times(n-1)$-matriser (rekursiv definisjon)

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$$

Alternativt kan vi benytte en annen rad eller en av kolonnene.

(det. av $n \times n$ matrise involverer $n!$ multiplikasjoner med denne definisjonen !)

8

Eksempel 2×2 matrisene

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = C^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Legg merke til at $\underline{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A}$

Dette gjelder også for $n \times n$-matriser.