4 mars 2015

La $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

Bestem $\det A$

A^{-1}

1 Finn variabel 2, x_2 i likningssystemet

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ for alle parametre a, b og c.

Regner det(A) ved å benytte definisjonen (bruker rad nr. 2)

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 0 + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(+21-5) + 2(-1)(10-9)$$

$$= -16 - 2 = \underline{-18}$$

Alternativt: utfører rad operasjon til matrisen blir på trappeform.

$$\det(A) = \frac{\left(\text{produktet av diagonalelementene på den reduserte matrisen}\right) \cdot (-1)^{\text{antall radebytter}}}{\text{produktet av skalarene vi har multiplisert radene med}}.$$

$$A \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot\left(\frac{-1}{3}\right)$$

②

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} -5 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{(1 \cdot 1 \cdot (-6)) \cdot (-1)^1}{-1/3} = \frac{(-6)\cdot(-1)}{-1/3}$$

$$= \underline{\underline{-18}}$$

Vi finner inversmatrisen ved å benytte radoperasjoner

$$[A \mid 1_3] \sim [1_3 \mid A^{-1}].$$

$$[A \mid 1_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{3} \\ -5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{+2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right] \frac{-1}{6}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-3}{18} \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{18} & \frac{16}{18} & \frac{6}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{18} & \frac{11}{18} & \frac{3}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-3}{18} \end{array}\right]$$ så $$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & 16 & 6 \\ -1 & 11 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Resultat $\quad A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det A}$

$\operatorname{adj} A = (\text{Cofaktormatrise})^T \leftarrow$ transponert.

(utelater utregningen her.)

③

—

$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. $\quad$ så $\quad \vec{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

$$x_2 = (\text{rad nr. 2 i } A^{-1}) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}[-1, 11, 3]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$$\underline{x_2 = \frac{-a + 11b + 3c}{18}}$$

Kramers regel $\quad A\vec{x} = \vec{b} \quad \det(A) \neq 0$

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

hvor $A_i(b)$ = matrisen A hvor søyle nr. i er erstattet av $\vec{b}$.

i vårt eksempel

$$A_2(b) = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 2 \\ -3 & c & -7 \end{bmatrix}$$

(bruker def. og søyle nr. 2)

$$\det(A_2(b)) = a(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$+ c(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -a(-1) + b(-11) - c \cdot 3$$

Så ved Kramers regel er

$$X_2 = \frac{a - 11b - 3c}{-18} = \frac{-a + 11b + 3c}{18}$$

4

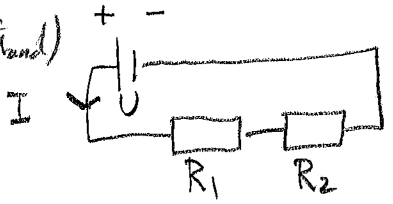
(5)

Kirchhoff's lover

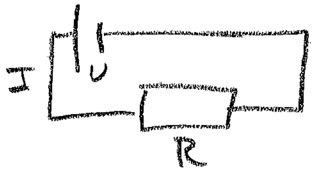
- sum av spenning rundt en lukket krets er 0
- Sum av strøm i et forgreningspunkt er 0

Ohm's lov $U = R\,I$ (spenning, strøm, resistanse (motstand))

Serie kobling



Hva må R være for å erstatte kretsen



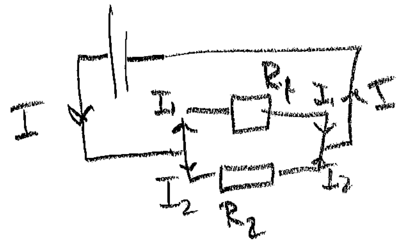
?

Spenning over en motstand R er $-I\cdot R$

$$-(I\cdot R_1 + I R_2) + U = 0$$

$$-I\cdot R + U = 0$$

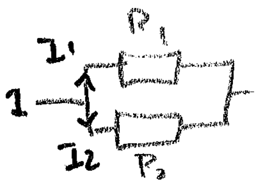
så $R = R_1 + R_2$ seriekoblet



$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = U$$

$$I = I_1 + I_2$$

Parallellkobling



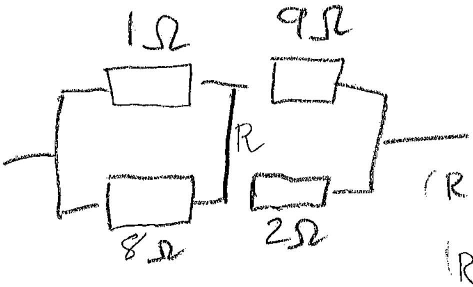
kan erstattes av en motstand

når $I\cdot R = U$ og $I = I_1 + I_2$

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Så $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1\cdot R_2}$ så $R = \frac{R_1\cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

(Hvis $R_1 = R_2$: $R = \frac{R_1}{2}$)



5Ω

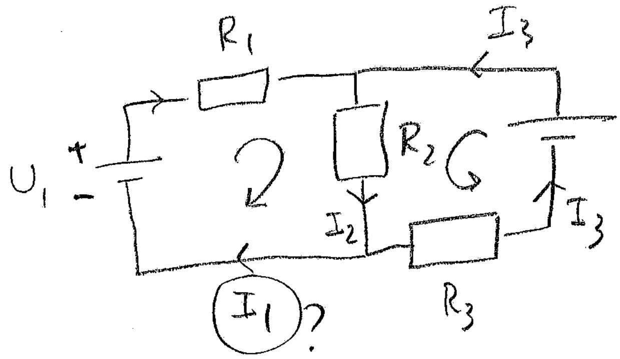
($R = \infty\Omega$)

($R = 0\Omega$) $\frac{8}{9} + \frac{18}{11} \approx 2{,}52\Omega$

Hva blir resultant motstanden uttrykt ved R (potmeter)

⑥

(Fysikk for data 2010)
(Uke 35)



A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$U_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

$$U_2 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) U_1 - R_2 U_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Kramers regel.

$$\frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ U_1 & R_2 & 0 \\ U_2 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} = \underline{\frac{U_1 R_3 + U_1 R_2 - U_2 R_2}{1 \cdot R_1 R_2 + R_3 (R_2 + R_1)}}$$

(7)

Matlab

Matrise $A = [\, a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} ; \ \ldots \ ]$ elementene kan selv være matriser (hvis dim. passer)

nyrad. ; skiller elementer ,

$A(i.j)$ plukker ut element $(i.j)$ fra A.

$a:b$ $\quad [a, a+1, \ldots, b]$

$\text{diag}(V) = \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix}$ for en vektor v

prøv og blkdiag(v) hvor matriser kan plasseres langs diagonalen for å lage blokkdiagonale matriser.

zeros(m,n) nullmatrise av dim (m,n)

zeros(n) ———— dim (n,n)

ones(m,n) alle elementer lik 1.

eye(n) identitets matrisen av dim n×n.

rref reduserer en matrise til redusert trappeform.

rand(m,n) tilfeldig m×n matrise med elementer mellom 0 og 1. randn(m,n) elementer normalfordelt rundt 0.

A' er den Hermitisk konjugerte til A (transponert og komplekskonjugert.)

inv(A) gir A^{-1} kan også finnes fra rref([A, eye(n)])

$= A^{(-1)}$

= eye(n)/A

det(A) regner ut determinanten.

A\b regner ut $A^{-1} \cdot b$ løsningene kan og finnes ved rref[A, b])