13.04.2015

Differensiallikninger

1

En differensiallikning for $Y(x)$ er en likning i $Y(x)$, $Y'(x)$, $Y''(x)$, ..., $Y^{(n)}(x)$ og funksjoner i x.

Eks $\quad Y' = 2Y \qquad Y^{(2)}(x) + \sin(x) = \frac{Y(x)}{x}$

$$2Y^{(4)} + 3Y''(x) - 5Y' + 6 \cdot Y = 0$$

En diff. likning har ORDEN n hvis $Y^{(n)}$ forekommer i diff. likningen, og ingen høyere deriverte forekommer.

En diff. likning er linear hvis den er på formen

$$a_n(x)\,Y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\,Y'(x) + a_0(x)\,Y(x) = f(x)$$

En lin diff. likning er homogen hvis $f(x) \equiv 0$ (identisk lik 0) ellers inhomogen.

En <u>løsning</u> til en diff. likning er en funksjon som gjør likningen (påstanden) sann.

siden $\quad (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot (e^{2x})$,

så er $Y(x) = e^{2x}$ er en løsning til diff. likningen

$$Y' = 2Y$$

(2) $(Ae^{2x})' = 2\cdot(Ae^{2x})$ så

$y(x) = Ae^{2x}$ er også løsninger. $A \in \mathbb{R}$

Dette er alle mulige løsninger.

A er en "fri variabel"

en parameter som beskriver løsningene.

Det er bare en løsning til $y' = 2y$

$y(0) = 3$

Løsningen er $y(x) = \underline{3e^{2x}}$.

$y'(x) = f(x)$

$y(x) = F(x) + C$

en antiderivert til $f(x)$

$y'(x) = 2x$

$y(x) = x^2 + C$

$y'' = 2$

$(y')' = 2$

$y' = 2x + C_1$

$y(x) = x^2 + C_1x + C_2$

C_1, C_2 reelle tall.

Løsningene til en diff. likning av orden n har n "frie parametre".

Eksempel

(3) $$y'' + k^2 y = 0$$

$$(\sin(kt))'' = (k\cos(kt))' = -k^2 \sin(kt).$$

$y_1 = \sin(kt)$ og $y_2 = \cos(kt)$ er løsninger

av den lineære 2. ordens homogene diff. likningen.

$$(Ay_1 + By_2)'' + k^2(Ay_1 + By_2)$$

$$= Ay_1'' + k^2 A \cdot y_1 + By_2'' + k^2 B y_2 = 0$$

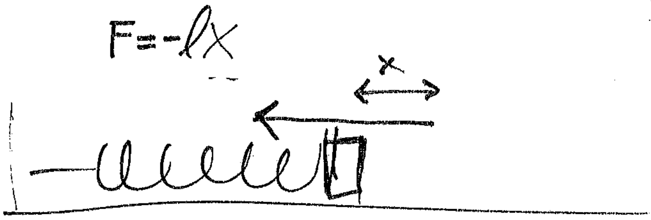
$$= A(y_1'' + k^2 y_1) + B(y_2'' + k^2 y_2) = 0.$$

Lineær kombinasjon av løsninger til homogene lineære diff likninger er også løsninger.

Løsningene til $y'' + k^2 y = 0$

er $\underline{A\cos(kt) + B\sin(kt)}$

A, B reelle tall.



$l > 0$

Newtons 2. loven

$$m \cdot x'' = \text{kraft} = -lx$$

$$m x'' + lx = 0$$

$$x'' + \left(\frac{l}{m}\right) x = 0$$

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{l}{m}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{l}{m}}\, t\right)$$

$$y'' + \overset{=2^2}{4}y = \cos(3t)$$

(4)

ikke resonanse

$$y'' + 4y = \cos(2t)$$ resonanse

Prøver $y = K(t\sin(2t))$

$$y' = K(1\cdot\sin 2t + t(-2\cos(2t)))$$

$$y'' = K((-2\cos 2t)\cdot 2 + t(-4\sin(2t)))$$

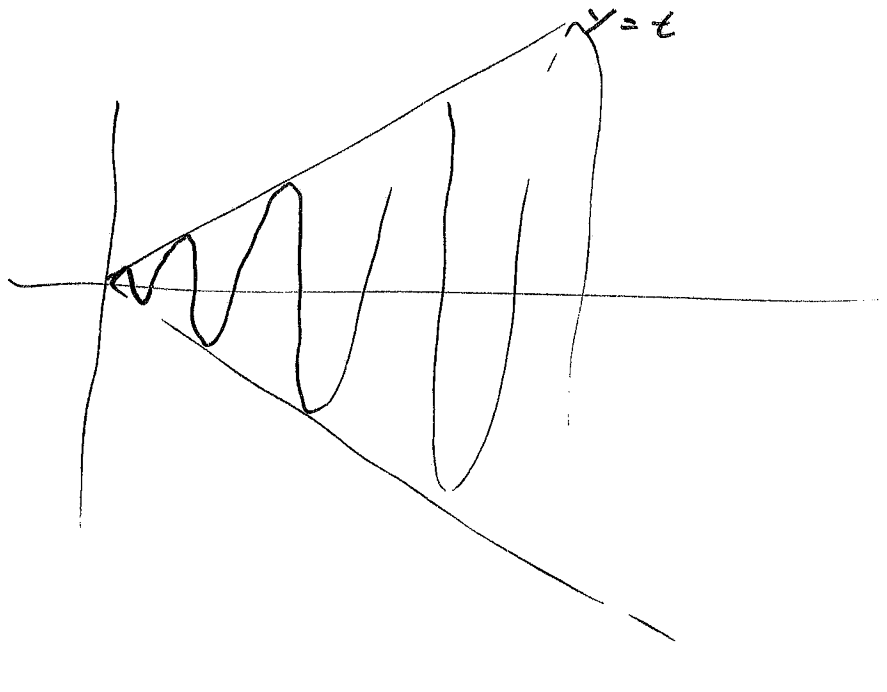
setter inn:

$$(-4\cdot K\cos(2t) - t4K\sin(2t)) + \underbrace{4Kt\sin(2t)}_{\text{kanselerer}} = \cos 2t$$

$$-4K\cos 2t = \cos 2t,$$

$$\underline{K = \frac{-1}{4}}$$

En løsning er $\frac{-1}{4}\cdot t\cdot\sin(2t)$



1. ordens diff. likninger

(5) $y' = F(x,y)$

$$y' = \sin x \sqrt{1 + y^3 \cos x}$$

Linear 1. ordens : $y' + p(x)\, y = q(x)$

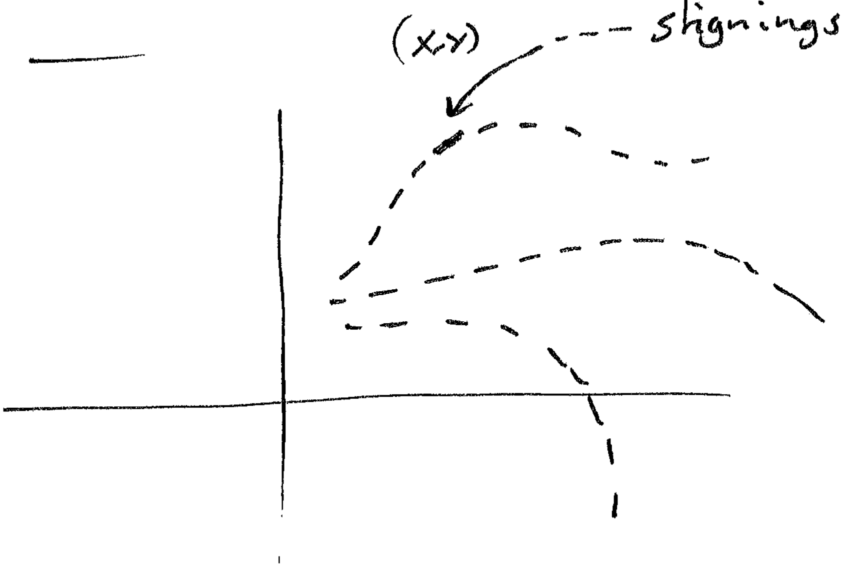
separable diff. likninger $\qquad y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$

$$f(y)\, y' = g(x)$$

separable diff. kan løses ved å integrer på begge sid

$$\int f(y) \underbrace{y'\,dx}_{dy} = \int g(x)\, dx$$

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx .$$



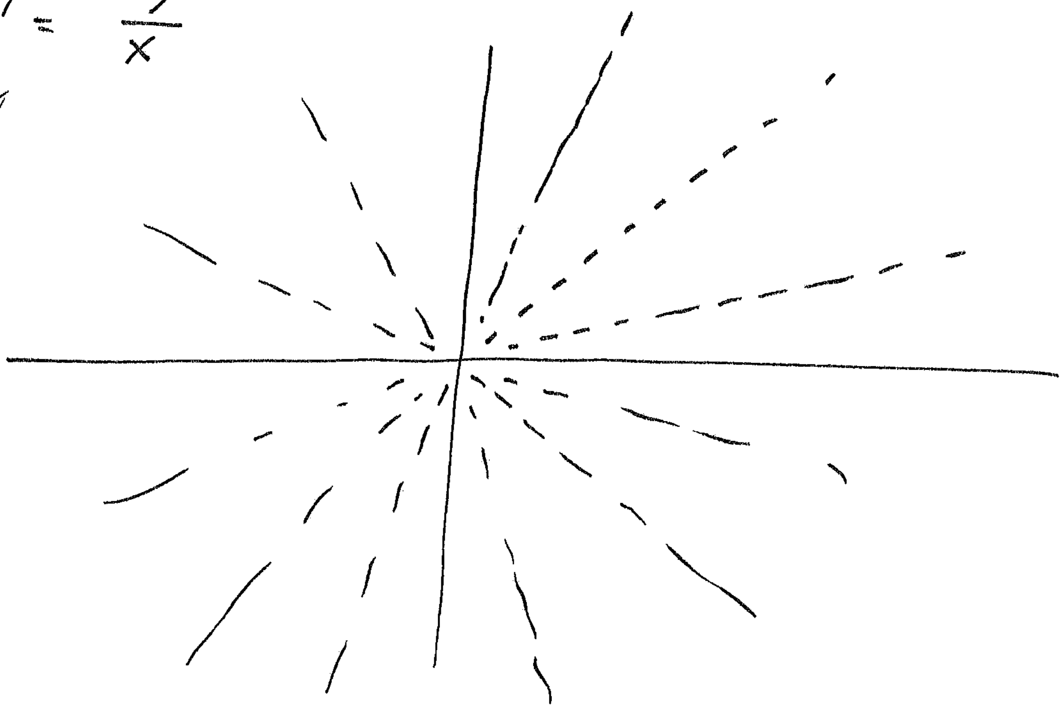
stigningstall $F(x,y) = y'$

Retningsfelt.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Eksempel

6



$y = cx$ c konstant

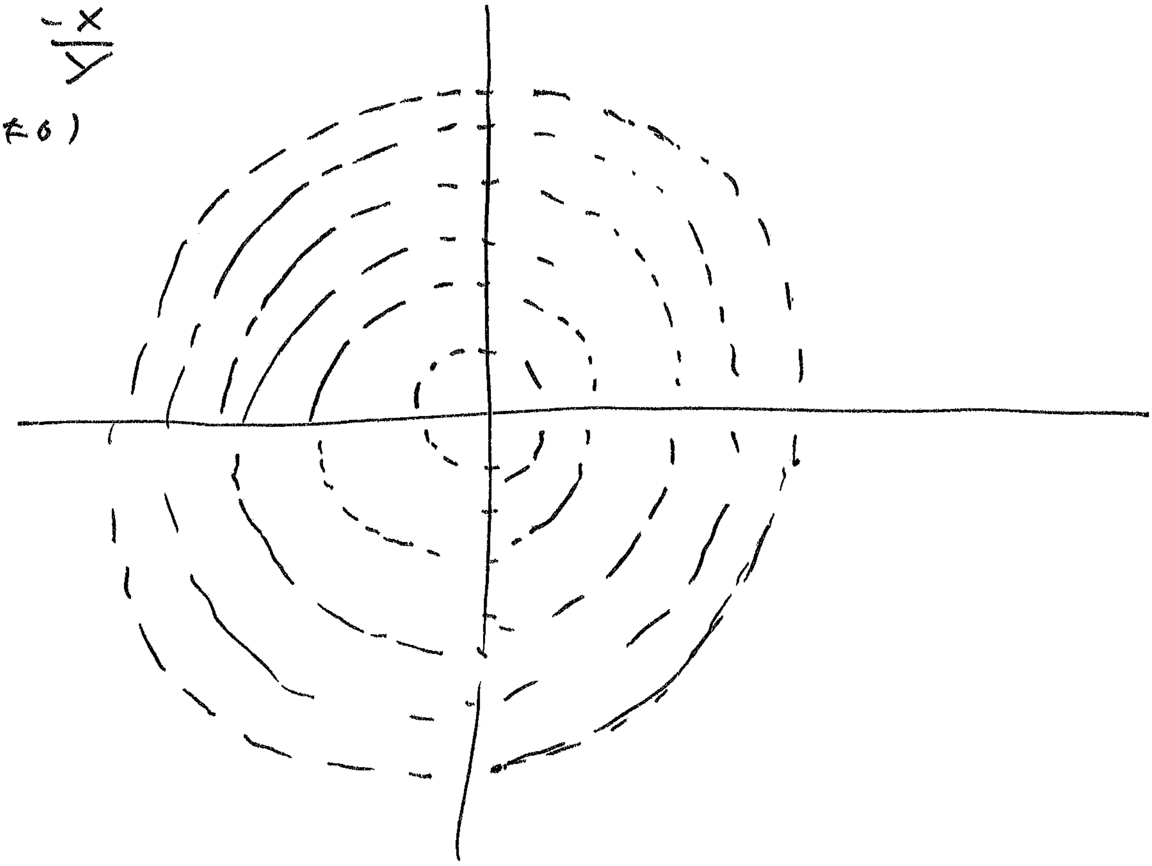
$y' = c$ $\frac{y}{x} = \frac{cx}{x} = c$

Viser at $y(x) = c \cdot x$ er løsningen for alle c.

$y' = \frac{-x}{y}$

$(y \neq 0)$

7



Retningsfeltet antyder at løsningene er sirkler. (senter i origo)

En sirkel med radius R er gitt implisitt

Ved: $x^2 + y_{(x)}^2 = R^2$

implisitt derivasjon: $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(R^2) = 0$

$$\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 = 0$$

$$2x + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} y^2 = 0$$

$$2x + y' \cdot 2y = 0$$

Så $y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

$(y \neq 0)$.

$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ $R > 0$

$-R \leq x \leq R$

og $-\sqrt{R^2 - x^2}$ $R > 0$.