22. april 2015

Eksempel. $y'' + 10y' + 9y = 7\cos 2x$

1 ~~startverdi~~ problem: $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

Homogene løsninger: $y'' + 10y' + 9y = 0$

Anta $y = e^{rx}$ $\quad y' = re^{rx} = r \cdot y$

$y'' = r^2 \cdot y$

Setter inn i diff. likningen: $(r^2 + 10r + 9)y = 0$

$\Leftrightarrow (r^2 + 10r + 9) = 0$

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$

$r = -9$ og $r = -1$.

De homogene løsningene er $y_h = \underline{Ae^{-9x} + Be^{-x}}$.

(Ved dobbel rot, r, så er e^{rx} og xe^{rx} løsninger)

Partikulær løsning: $y'' + 10y' + 9y = 7\cos(2x)$ (*)

$= 7\,\mathrm{Re}(e^{2ix})$

Løser likningen: $y'' + 10y' + 9y = 7e^{2ix}$

Realdelen til en slik løsning er en løsning av *.

Prøver med $y = Ke^{2ix}$. $\quad K \in \mathbb{C}$

$y' = 2i(Ke^{2ix}) = 2i\,y$ $\quad y'' = (y')' = (2iy)'$

$= (2i)^2 \cdot y = -4y$

Setter inn:

$(-4 + 10 \cdot 2i + 9)y = 7e^{2ix}$

$(5 + 20i)Ke^{2ix} = 7e^{2ix}$

$$K = \frac{7}{5(1+4i)} = \frac{7 \cdot (1-4i)}{5(1+4i)(1-4i)} = \underline{\frac{7(1-4i)}{5 \cdot 17}}$$

$$y_p = \mathrm{Re}\ \frac{7}{5\cdot 17}(1-4i)\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)$$

(2)

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{7}{5\cdot 17}\left(\cos(2x) + 4\sin(2x)\right) + \frac{7}{5\cdot 17}\, i\left(-4i\cos(2x) + \sin(2x)\right)\right)$$

$$= \frac{7}{5\cdot 17}\left(\cos(2x) + 4\sin(2x)\right)$$

Løsningen er $y(x) = Ae^{-9x} + Be^{-x} + \frac{7}{5\cdot 17}\left(\cos(2x) + 4\sin(2x)\right)$

$$y(0) = A + B + \frac{7}{5\cdot 17} = 0$$

$$y'(x) = -9Ae^{-9x} - Be^{-x} + \frac{7}{5\cdot 17}\left(-2\sin(2x) + 8\cos(2x)\right)$$

$$y'(0) = -9A - B + \frac{7}{5\cdot 17}\cdot 4\cdot 2 = 0$$

To likninger to ukjente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/(5\cdot 17) \\ 2\cdot 4\cdot 7/(5\cdot 17) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{1-9}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7/(5\cdot 17) \\ 2\cdot 4\cdot 7/(5\cdot 17) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{8}\cdot\frac{1}{5\cdot 17}\begin{bmatrix} -7 - 2\cdot 4\cdot 7 \\ -7\cdot(-9) + 2\cdot 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8\cdot 5\cdot 17}\begin{bmatrix} 7\cdot(1+8) \\ -7(8+9) \end{bmatrix}$$

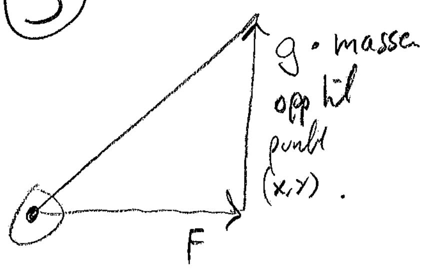
$$= \frac{1}{8\cdot 5\cdot 17}\begin{bmatrix} 7\cdot 9 \\ -17\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 9/(5\cdot 8\cdot 17) \\ -7/(5\cdot 8) \end{bmatrix}$$

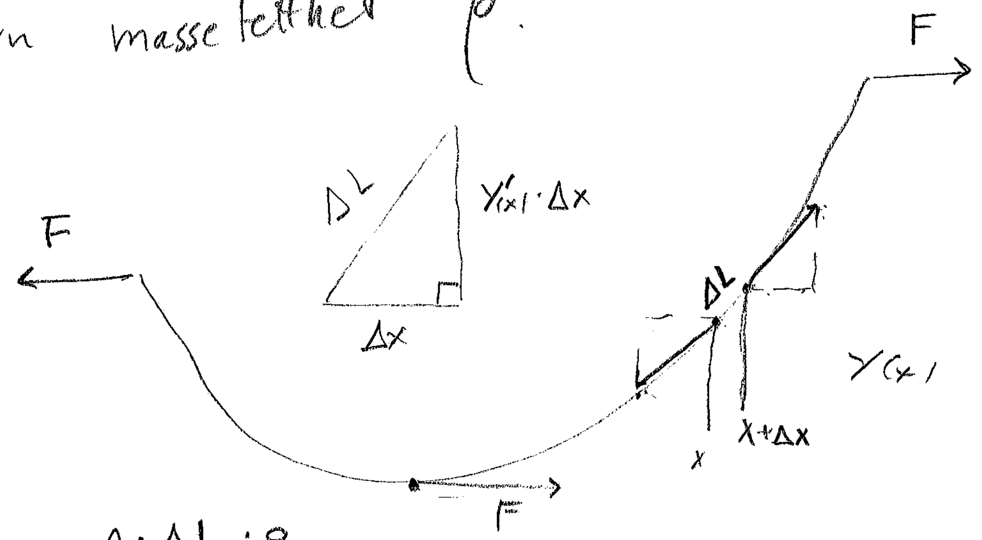
$$y(x) = \frac{7\cdot 9}{5\cdot 8\cdot 17}e^{-9x} + \frac{-7}{5\cdot 8}e^{-x} + \frac{7}{5\cdot 17}\left(\cos(2x) + 4\sin(2x)\right)$$

Hengende kjede

jevn massetetthet ρ.

(3)





$$\Delta y'(x) = \frac{\rho \cdot \Delta L \cdot g}{F} = \frac{\rho \cdot g}{F} \underbrace{\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\Delta x}_{\Delta L}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(y'(x))}{\Delta x} = \boxed{y''(x) = \frac{\rho \cdot g}{F}\sqrt{1+(y'(x))^2}}$$

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{\rho g}{F}(x - x_0)\right)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \qquad \sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$$

$$y(x) = \frac{F}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{F}(x - x_0)\right) + y_0$$

---

opp til horisontal og vertikal forskyvning er et hengende kjede beskrevet av

$$y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx) \qquad k = \frac{\rho \cdot g}{F}.$$

Forsøk gjerne selv å holde et (smykke) kjede over grafen til $\frac{1}{c}\cos(cx)$.

(Det ligger ute en geogebra demonstrasjon som kan brukes)

1. ordens lineære diff. likninger

4

$$y' + f(x)\,y = g(x)$$

Idee : gange med en funksjon $V(x)$

slik at $\quad V(x)\cdot y' + f(x)\cdot V(x)\cdot y = (V(x)\cdot y)'$

prod. regel $\quad V(x)\cdot y' + V'(x)\cdot y$

Da må $\quad V'(x) = f(x)\cdot V(x).$

$\left(\left(e^{k(x)}\right)' = k'(x)\cdot e^{k(x)} \right)$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$. Da $\quad \frac{d}{dx} e^{F(x)} = F'(x)\, e^{F(x)} = f(x)\, e^{F(x)}.$

så $\quad V(x) = e^{F(x)}.$

$$(y' + f(x)\,y)\, e^{F(x)} = (y\cdot e^{F(x)})' = g(x)\, e^{F(x)}.$$

$$y\cdot e^{F(x)} = \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx$$

$$\boxed{y(x) = e^{-F(x)} \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx}$$

Eksempler

(5)

$$\underbrace{x^2 y' + 2xy}_{(x^2 \cdot y)'} = \sin x$$

$$(x^2 \cdot y)' = \sin x$$

$$x^2 \cdot y(x) = \int \sin x = -\cos x + c$$

$$y(x) = \frac{-\cos x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$$

$$y' + \frac{2}{x} y = \ln x$$

ganger med x^2 på begge sider:

$$x^2 y' + 2x \cdot y = x^2 \ln x$$

$$(x^2 \cdot y)' = x^2 \ln x$$

$$x^2 \cdot y = \int \underbrace{x^2}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} \, dx$$

(delvis integrasjon $u = \frac{x^3}{3}$)

$$= \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \ln x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}}_{u \cdot v'} \, dx$$

$$x^2 \cdot y = \frac{x^3}{3} \ln x - \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^3 + C$$

$$y(x) = \frac{x}{3} \ln x - \frac{x}{9} + \frac{c}{x^2}$$

$$y' + \underbrace{\sin x}_{f(x)}\, y = \underbrace{3\sin x}_{g(x)}$$

(b) $F(x) = -\cos x$ antiderivert til f.

$$e^{F(x)}(y' + \sin x\, y) = (y \cdot e^{F(x)})'$$
$$= 3\sin x\, e^{+F(x)}$$

$$(y \cdot e^{-\cos x})' = \int 3\sin x\, e^{-\cos x}\, dx$$

substitusjon $u = -\cos x$

$u' = \sin x$

$$= 3\int e^{u}\, du = 3e^{u} + c$$

$$y e^{-\cos x} = 3e^{-\cos x} + c$$

$$\underline{y(x) = 3 + c \cdot e^{+\cos x}}$$

(Alternativt benytte at diff. likningen er separabel.)

---

1. orden lin diff. likning med konst. koeff.

$$y' + ky = g(x)$$

$$e^{kx}(y' + ky) = e^{kx} g(x)$$

$$(y \cdot e^{kx})' = e^{kx} g(x)$$

$$y = e^{-kx} \int e^{kx} \cdot g(x)\, dx$$

Hvis $g(x)$ er et pol. av grad n.

(7) så er $\int e^{kx} g(x)\,dx$ igjen et (annet) polynom av grad n ganget med e^{kx}.

Så en løsningen til $y' + ky = g(x)$ er et pol. av grad n når $g(x)$ er et pol. av grad n. (De homogene løsningene er Ae^{-kx}.)

Tilsvarende $\int e^{kx} \sin x\,dx$ er på formen $e^{kx}(A\cos x + B\sin x)\ \ldots$

$$x \cdot y' - y = x \qquad x > 0$$

$$y' - \frac{1}{x} y = 1$$

($\left(-\frac{x}{2}\right)$: $x\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{x}{2}\right) = 0$. generelt er $c \cdot x$ en homogen løsning

cx : $x \cdot c - cx = 0$)

$$y' + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{f(x)} y = \underbrace{1}_{g(x)}$$

$F(x) = -\ln x$

$$e^{-\ln x} = e^{\ln x \cdot (-1)} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x}$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x}$$

(8)

$$y \cdot \frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$$

$$y(x) = \underline{\underline{x \ln x + c \cdot x}}$$