Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 7

Numerisk derivasjon

Vi skal se at der er flere måte å regne ut deriverte på – i tillegg til de derivasjonsreglene vi kjenner fra før. Men ikke alle måtene er like gode... Vi skal også ta en rask titt på numerisk integrasjon.

Som vanlig forutsettes det at tidligere gitte oppgavesett er gjort.

Oppgave 1 – Numerisk derivasjon

a) Velg deg en eller annen funksjon $f(x)$. Den skal være grei å derivere, men ikke *så* grei at det bli kjedelig. Kjedelig blir det, for eksemepel, om du lar f være et første- eller andregradspolynom.

   Velg deg en verdi a og regn ut $f'(a)$.

b) Som kjent er den deriverte definert ved denne grenseverdien:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

   Med utgangspunkt i denne definisjonen kan vi komme fram til en måte å regne ut tilnærma verdier av den deriverte på: Vi lar h være liten men endelig (til forskjell fra "*uendelig liten*", som over):

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

   Dersom h er liten nok, bør dette utrykket gi en rimeleg god tilnærming – et godt *estimat* – for $f'(a)$.

   Bruk stadig lavere verdier av h og undersøk om den tilnærma deriverte du får faktisk nærmer seg $f'(a)$. (Disse utregningene kan du gjøre ganske effektivt om du lager deg ei funksjonfil for funksjonen du valgte i deloppgave a) – og bruker pil-tastene når du skal gjenta kommandoer i kommandovinduet.)

c) Vi kunne like gjerne ha definert den deriverte som

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \quad .$$

Siden det ikke er gitt at h skal være positiv, er dette akkurat den samme definisjonen. Om vi "dropper" grenseverdien og fremdeles insisterer på at h skal være liten, får vi denne formelen for å estimere en derivert:

$$f'(a)\approx\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \quad .$$

Bruk denne "bakover"-formelen til å finne tilnærma verdier av $f'(a)$, og undersøk om verdien faktisk nærmer seg $f'(a)$ når blir mindre.

d) Om vi tar gjennomsnittet av disse to estimatene, får vi enda en ny formel for å estimere den deriverte:

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \; .$$

Denne formelen kaller vi *midpunktsformelen for numerisk derivasjon.*

Med papir og blyant: Vis hvordan vi kan komme fram til dette.

e) Bruk formelen fra d) til å regne ut tilnærma verdier for $f'(a)$. Kan du si noe om hvilken av de tre metodene vi har sett som ser ut til å være best til å estimere $f'(a)$?

f) Skriv '`>> eps`' i kommandovinduet i MATLAB. Dette tallet angir, som tideligere nevnt, *maskinpresisjonen* – det minste tallet ϵ som er slik at datamaskina klarer å skille mellom $1+\epsilon$ og 1. Dette tallet sier altså noe om nøyaktigheten vi opererer med. Bruk formelen du kom fram til i d) til å estimere $f'(a)$ med h-verdier som er sammenlignbare med og mindre enn `eps`. Hva skjer?

g) Lag en vektor med flere h-verdier i synkende rekkefølge. Disse kan for eksempel gå fra 1 ned mot 0. Tips: Vektoren $[1, 0.1, 0.01, 0.001]$ kan lages slik: '`>> 10.^[0:-1:-3]`'. For hver av de tre måtene å estimere $f'(a)$ på, lag en vektor med absoluttverdien av differansen mellom estimatet og den eksakte verdien av $f'(a)$ for hver verdi i h-vektoren. Plott hver av disse tre vektore mot h-vektoren. Kanskje kan det være en god idé å plotte med kommandoen `semilogx` i stedet for `plot`. Denne måten å plotte på, bruker en *logaritmisk* x-akse.

Ble det tydeligere hva som gir det beste estimatet for $f'(a)$ nå?

h) Velg deg en eller annen funksjon $g(x)$ som *er* et andregradspolynom. Bruk gjennomsnitts-formelen du kom fram til i e) til å estimere $g'(a)$ for diverse verdier av a og h. Hva skjer? Klarer du å forklare hvorfor?

Oppgave 2 – Den deriverte fra en tabell

I den forrige oppgava regna vi ut numeriske estimater for den deriverte for en funksjon som vi kjente den deriverte til eksakt. Om du synest dette kunne virke noe unødvendig, kan du nok ha rett; hva skal vi vel med estimater når vi har de eksakte verdiene? Poenget med å gjøre dette var at det gir oss muligheten til å få en følelse av hvor gode disse numeriske estimatene er. Dette hadde vært vanskeligere å få hvis vi ikke hadde hatt "fasiten" – den eksakte deriverte.

I denne oppgava bør det nok bli litt tydeligere hva motivasjonen for å lære om numerisk derivasjon er. Vi tar utgangspunkt i denne tabellen:

År	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Bef.	1650	1750	1860	2070	2300	2520	3020	3700	4450	5300	6123

Tabellen viser jordens befolkning, målt i antall millioner, for forrige århundre.

a) Bruk tabellen til å lage et plott som viser jordens befolkning for de årene som er oppgitt.

b) Bruk formelen fra deloppgave e) over til å estimere den deriverte av befolkningsvektsten for årene 1910 – 1990.

c) Hvorfor fungerer det dårlig å bruke denne formelen om vi skal estimere den momentane befolkningsveksten i årene 1900 og 2000? Hvilke formler kan vi bruke i stedet?

d) Lag et skript som renger ut alle disse estimatene. Du får bruk for å lage ei `for`-løkke. Du kan også få bruk for en `if`-sats, men det er mulig å unngå dette. I tillegg til å regne ut disse størrelsene skal skriptet også lage et plott av den deriverte av befolkningsveksten for årene fra og med 1900 til og med 2000. Lag også et plott for den *prosentvise* veksten disse årene – altså veksten i forhold til folketallet.

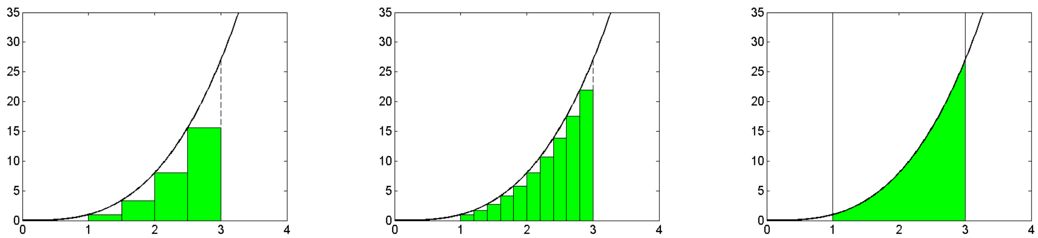
Oppgave 3 – Mange rektangler (og noen trapeser)

For gitt funksjon $f(x)$ og tall a og b med $b > a$ definerer vi summen V_n ved

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_n f(x_k)$$

der $\Delta x_n = (b-a)/n$ og $x_k = a + k\Delta x_n$.

a) Plottet til venstre i figur 1 illustrerer denne summen for $f(x) = x^3$, $a = 1$, $b = 3$ og $n = 4$. Geometrisk, hva *er* denne summen? Lag et skript som regner ut denne summen og finn V_n for større og større verdier av n. Hva ser V_n ut til å nærme seg? Klarer du å bestemme denne grenseverdien eksakt? Ta gjerne plottet i midten og til høgre i figur 1 til hjelp.

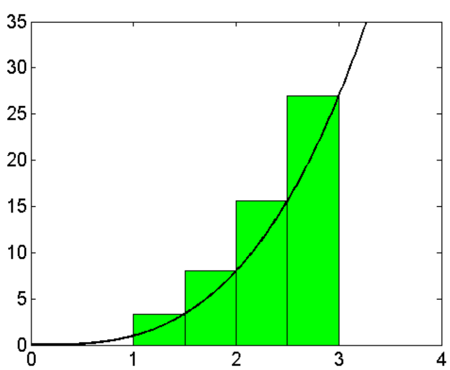


Figur 1: Venstre: Illustrasjon til summen V_n med $n = 4$. Midt: De samme, men for V_{10}. Høgre: Arealet mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra $x = 1$ til $x = 3$.

b) En annen lignende sum er definert som

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_n f(x_k) \quad .$$

Merk at forskjellen mellom V_n og H_n ligger i summasjonsgrensene. Se



Figur 2: Venstre: Illustrasjon til summen L_n med $n = 4$. Midt: De samme, men for L_{10}. Høgre: Arealet mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra $x = 1$ til $x = 3$.

figur 2. Hva representerer denne – geometrisk? Justér skriptet ditt slik at den regner ut H_n i stedet for V_n, og finn H_n for stadig høyere verdier for n. Kontrollér at H_n nærmer seg det samme som V_n for økende n.

c) Vi definerer en tredje sum, T_n, som gjennomsnittet av venstre- og høgresummene fra a) og b),

$$T_n = \frac{1}{2}\left(V_n + H_n\right) \quad .$$

Denne vil nærme seg samme verdi som V_n og H_n når n øker mot et høyt tall; $\lim_{n\to\ \infty} V_n = \lim_{n\to\ \infty} H_n = \lim_{n\to\ \infty} T_n = L$.

Undersøk hvilken av de tre summene V_n, H_n og T_n som nærmer seg dette tallet raskest. Før du begynner: Hva tipper du? Lag gjerne plott som viser $|V_n - L|$ ect. som funksjon av n.