Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Mandag 2. mars 2015 før forelesningen 10:30
Antall oppgaver:	17

1

Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3\cos(2x-1)+12$

b) $f(x) = x^2\sin(x)$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$

d) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$

e) $f(x) = \sin(7x+1)/(\sin(-x)+x)$

f) $f(x) = \sin(3x)+\sin(x)-4\sin(x)\cos^2(x)-1$

g) $h(x) = \begin{cases} -x^3 & x<0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

2

La a være et positivt reelt tall ulik 1.

a) Bestem den deriverte til a^x. Finn også grensen

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

b) Logaritmen med basis a av et positivt tall x er eksponenten vi må ha i en potens med grunntall a for at potensen skal bli lik x

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Vis at

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

og dermed at

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Hint: Vi har at $a = e^{\ln(a)}$. Kombinert med potensreglene så er $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a)x}$.

3

Funksjonen $\ln(-x)$ er definert for alle $x < 0$. Vis at den deriverte til denne funksjonen er lik

$$\frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Forklar hvorfor dette gir

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

for alle $x \neq 0$.

4

Bestem den deriverte til følgende funksjoner.

a) 35^x

b) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

c) $\log_2|x|$

d) $\log_x(3)$

e) x^x

f) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}\sqrt[3]{x} & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + 3 & x > 1 \end{cases}$

5

Avgjør om grensene eksisterer og finn de som eksisterer.

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)}$$

b)

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1}$$

c)

$$\lim_{x\to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 + 1}$$

Regn gjerne også ut

$$\lim_{x\to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 - 1}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[100]{x}}$$

6

Beskriv alle polynomer av grad 3 eller lavere som går gjennom punktene $(0,0)$, $(1,1)$ og som har derivert lik 0 når $x = 1$. (Under materiell på geogebra.org finnes "En familie av polynomer". Der visualiseres løsningene til en tilsvarende oppgave for polynomer av grad 4 eller mindre.)

7

Finn alle tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - x^2$ som er parallelle til linjen $y = 4x + 1$.

8

For hver $a \geq 0$ finn korteste avstand fra (punktene på) grafen til $y = \sqrt{x}$, for $x \geq 0$, og punktet P, med koordinater $(a, 0)$, på x-aksen. Finn også punktene på grafen som er nærmest P.

9

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

10

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Invendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er $3/4$ av høyden til kulen (det vil si $3/2$ ganget med radius til kulen).

11

Vi ser fra eksemplene $\sin(x), \cos(x), x^n$ at den deriverte av en odde funksjon er en jevn funksjon og at den deriverte av en jevn funksjon er en odde funksjon. Dette gjelder faktisk generelt. Vis (forklar) hvorfor det er sant generelt. (Det ligger et notat om odde og jevne funksjoner på hjemmesiden under uke 5.)

12

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervalet. Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen monotonitester etc.

Forsøk med Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1 \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} - 2 \quad x \geq 0$

c) $\arctan(x) - x - 1 \quad$ alle x

d) $x^3 + 2x - 2 \quad$ alle x

13

Her er et standard eksempel som viser at den deriverte ikke alltid trenger være en kontinuerlig funksjon. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 \sin(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

er deriverbar i alle punkt, men at den ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

(Det er et resultat at diskontinuitetene til den deriverte må være essensielle diskontinuiteter. Det finnes ikke en funksjon som har en derivert med hopp-diskontinuitet.)

14

Bestem koeffisientene $b_0, b_1, \ldots b_n$ slik at polynomet

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

har samme m-deriverte som $f(x)$ i punktet a for $m = 0, 1, 2, \ldots n$. (Den 0-deriverte til f i $x = a$ er bare funksjonsverdien i a, som er $f(a)$.)

Vis hvordan du bestemmer koeffisientene i polynomet.

15

Bestem Taylor polynomet til $\frac{1}{1-x}$ rundt 0 til orden $1, 2, 3, 4, 5$ og gjerne generelt til orden n.

I de neste to oppgavene er det naturlig å benytte en Taylor ekspansjon til $f(x)$ om $x = a$. Vi antar at funksjonene som forekommer er minst 5 ganger deriverbare.

16

En nummerisk versjon av den andrederiverte til $f(x)$ i $x = a$ er

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Dere kan godt tenke på dette som resultatet av å finne den nummerisk deriverte

$$\frac{f'(a+h/2) - f'(a-h/2)}{h}$$

av $f'(a)$ ved å benytte nummerisk deriverte istede for $f'(a+h/2)$ og $f'(a-h/2)$.

Anta at f er minst 5 ganger deriverbar. Vis at denne tilnærming avviker fra $f''(a)$ med et feilledd som går mot null som h^2. Mer presist vis at:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f''(a) - \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\right) = -\frac{f^{(4)}(a)}{12}$$

17

I denne oppgaven skal vi forbedre den nummerisk deriverte.

For en gitt a la

$$A(h) = \frac{8(f(a+h) - f(a-h)) - (f(a+2h) - f(a-2h))}{12h}$$

Se gjerne geogebra demonstrasjonen linket til på hjemmesiden ("sekant- og tangentlinjer"). Vis at $A(h)$ gir en tilnærming til den deriverte til f i a med et avvik som går som h^4. Mer presist vis at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a) - A(h)}{h^4} = \frac{f^{(5)}(a)}{30}$$