Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Mandag 2. mars 2015 før forelesningen 10:30
Antall oppgaver:	17

Løsningsforslag

1

Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3\cos(2x-1) + 12$

LF: Vi benytter (lineær) kjerneregel og får

$$f'(x) = (3\cos(2x-1)+12)' = 3(-\sin(2x-1))(2x-1)' = \underline{-6\sin(2x-1)}$$

b) $f(x) = x^2\sin(x)$

LF: Vi benytter produktregelen

$$f'(x) = (x^2\sin(x))' = \underline{2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$

LF: Vi benytter kjerneregelen

$$f'(x) = (\cos(\sin(x)))' = -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

d) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$

LF: Vi benytter produktregelen

$$f'(x) = (\cos(2x))'\sin(3x)+\cos(2x)(\sin(3x))' = \underline{3\cos(2x)\cos(3x) - 2\sin(2x)\sin(3x)}$$

e) Vi benytter kvotientregelen $f(x) = \sin(7x+1)/(\sin(-x)+x)$

LF:

$$f'(x) = \frac{(\sin(7x+1))'(\sin(-x)+x) - \sin(7x+1)(\sin(-x)+x)'}{(-\sin(x)+x)^2} =$$

$$\frac{7\cos(7x+1)(-\sin(x)+x) - \sin(7x+1)(-\cos(x)+1)}{(-\sin(x)+x)^2}$$

f) $f(x) = \sin(3x) + \sin(x) - 4\sin(x)\cos^2(x) - 1$

LF:

$$f'(x) = 3\cos(3x) + \cos(x) - 4((\sin(x))'\cos^2(x) + \sin(x)((\cos(x))^2)') - 0$$

$$3\cos(3x) + \cos(x) - 4(\cos(x)\cos^2(x) + \sin(x)2\cos(x)(-\sin(x))) =$$

$$\underline{3\cos(3x) + \cos(x) - 4(\cos^3(x) - 2\cos(x)\sin^2(x))}.$$

Dette er også lik $3\cos(3x) - 3\cos(x) + 12\cos(x)\sin^2(x)$.

g) $h(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

LF:

$$\underline{h'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x < 0 \\ 4x^3 & x \geq 0 \end{cases}}$$

Her har vi sjekket at den deriverte i "knekkpunktet", hvor vi skifter uttrykk, faktisk eksisterer og er lik 0.

Siden begge grensene

$$\lim_{k \to 0^+} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k \to 0^+} \frac{k^4 - 0}{k} = 0$$

og

$$\lim_{k \to 0^-} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k \to 0^-} \frac{-k^3 - 0}{k} = 0$$

eksisterer og er lik 0, så eksisterer grensen

$$\frac{d\,h(x)}{d\,x}\Big|_{x=0} = \lim_{k \to 0} \frac{h(k) - h(0)}{k}$$

og den deriverte til h i $x = 0$ er lik 0.

2

La a være et positivt reelt tall ulik 1.

a) Bestem den deriverte til a^x. Finn også grensen

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

LF: Den deriverte av a^x er lik

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = \underline{\ln(a)a^x}$$

ved bruk av kjerneregelen.

Fra definisjonen av den deriverte (se gjerne notatene) så er

$$(a^x)' = a^x \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \right)$$

Kombinert med resultatet ovenfor så får vi at

$$\underline{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)}$$

(Alternativt kan dere bruke L'Hopitals regel etc.)

b) Logaritmen med basis a av et positivt tall x er eksponenten vi må ha i en potens med grunntall a for at potensen skal bli lik x

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Vis at

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

og dermed at

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Hint: Vi har at $a = e^{\ln(a)}$. Kombinert med potensreglene så er $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a)x}$.

LF: Ta naturlig logaritme på begge sider av $x = a^{\log_a(x)}$. Logaritmereglene gir da

$$\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \cdot \ln(a).$$

Vi deler nå med $\ln(a)$ på begge sider av likhetstegnet og får

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Siden a er en konstant får vi

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (\ln(x))' = \underline{\frac{1}{x \ln(a)}}.$$

3

Funksjonen $\ln(-x)$ er definert for alle $x < 0$. Vis at den deriverte til denne funksjonen er lik

$$\frac{d \ln(-x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Forklar hvorfor dette gir

$$\frac{d \ln |x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

for alle $x \neq 0$.

LF: Siden $-x$ er positiv for alle negative x og ln er definert for alle positive tall så er $\ln(-x)$ definert for alle negative tall x.

Vi har at $(\ln(x))' = 1/x$ for alle $x > 0$. Kjerneregelen gir

$$\frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Siden

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

gir resultatet ovenfor at

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

for alle $x \neq 0$.

Så $\ln|x|$ er en antiderivert til $1/x$ for alle $x \neq 0$.

4

Bestem den deriverte til følgende funksjoner.

a) 35^x

LF:

$$(35^x)' = (e^{x\cdot\ln(35)})' = \underline{\ln(35)\cdot 35^x}.$$

b) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

LF: Den deriverte er ie^{ix}. Dette er lik

$$i(\cos(x) + i\sin(x)) = \underline{-\sin(x) + i\cos(x)}.$$

Dette ser vi også ved å alternativt derivere $\cos(x) + i\sin(x)$ direkte.

c) $\log_2|x|$

LF: Den deriverte er ved oppgave 2 og 3 lik

$$(\log_2|x|)' = \underline{\frac{1}{x\cdot\ln(2)}}.$$

d) $\log_x(3)$

LF: Vi har at $\log_x(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(x)}$ ved oppgave 2. Den deriverte blir derfor lik

$$(\log_x(3))' = \left(\frac{\ln(3)}{\ln(x)}\right)' = \frac{-\ln(3)}{(\ln(x))^2}\cdot(\ln(x))' = \underline{\frac{-\ln(3)}{x(\ln(x))^2}}.$$

e) x^x

LF: Vi skriver om x^x til en potens med grunntall e som følger

$$x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}.$$

Den deriverte finner vi ved å benytte kjerneregel og produktregel

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' =$$

$$e^{x\ln(x)} \cdot (1 + \ln(x)) = \underline{x^x(1 + \ln(x))}$$

f) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}\sqrt[3]{x} & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + 3 & x > 1 \end{cases}$

LF: De deriverte i det indre av intervallene for hvert funksjonsuttrykk gir

$$h(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{-x}}{6(\sqrt[3]{x})^2} & x < 0 \\ 1/\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 4x - 3 & x > 1 \end{cases}$$

Vi må i tillegg sjekke hva som skjer i punktene $x = 0$ og $x = 1$ (hvor vi skifter funkjsonsuttrykk). I $x = 1$ vil den deriverte eksistere og være lik 1 (vi bruker definisjonen og tar grensene fra hver side av 1), mens den deriverte ikke eksisterer i $x = 0$. Den deriverte fra høyre eksisterer ikke der. Konklusjonen er derfor at

$$\underline{h(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{-x}}{6(\sqrt[3]{x})^2} & x < 0 \\ 1/\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 4x - 3 & x \geq 1 \end{cases}}$$

5

Avgjør om grensene eksisterer og finn de som eksisterer.

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)}$$

LF: Dette er en grense av type 0/0. L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/(2\sqrt{x})}{\pi\cos(\pi x)} = 1/(2\pi).$$

Så grensen eksisterer og er lik $\underline{1/(2\pi)}$.

b)

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1}$$

LF: Grensen av nevneren er lik 1 og grensen av telleren er lik $e^{\sqrt{2}} - e^2$. Fra grensesetningene er derfor

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1} = \underline{e^{\sqrt{2}} - e^2}$$

c)

$$\lim_{x \to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 + 1}$$

LF: Grensen av nevneren er lik 2 og grensen av telleren er lik 0. Derfor er grensen lik $\underline{0}$.

Regn gjerne også ut

$$\lim_{x \to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 - 1}$$

LF: Dette er en grense av typen 0/0. Ved L'Hopitals regel er grensen lik

$$\lim_{x \to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\ln(2)2^x}{2x} = \underline{\frac{-\ln(2)}{4}}$$

d)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[100]{x}}$$

LF: Dette er en grense av type ∞/∞. Ved L'Hopitals regel er dette lik

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{x^{-99/100}} \frac{1}{100} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{1/100}} \frac{1}{100} = \underline{0}$$

6

Beskriv alle polynomer av grad 3 eller lavere som går gjennom punktene $(0, 0)$, $(1, 1)$ og som har derivert lik 0 når $x = 1$. (Under materiell på geogebra.org finnes "En familie av polynomer". Der visualiseres løsningene til en tilsvarende oppgave for polynomer av grad 4 eller mindre.)

LF: Et polynom av grad 3 eller lavere er på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

At polynomet skal gå gjennom punktene $(0, 0)$, $(1, 1)$ gir følgende to føringer på koeffisientene:

$$p(0) = d = 0 \quad \text{og} \quad p(1) = a + b + c + d = 1.$$

At den deriverte er 0 når $x = 1$ gir likningen

$$3a + 2b + c = 0.$$

Vi har nå 4 ukjente og 3 likninger. Koeffisienten c er gitt ved $-(3a+2b)$ og

$$a+b+c=a+b-(3a+2b)=-2a-b=1.$$

Dette gir at

$$b=-(2a+1),\quad c=a+2,\quad d=0.$$

Polynomene er derfor

$$\underline{ax^3-(2a+1)x^2+(a+2)x}$$

for reelle tall a.

7

Finn alle tangentlinjene til funksjonen $f(x)=x^3-x^2$ som er parallelle til linjen $y=4x+1$.

LF: En tangentlinje er parallell til $y=4x+1$ hvis og bare hvis $f'(x)$ er lik 4. Vi finner først den deriverte til $f(x)$ og bestemmer når den er lik 4. Den deriverte er lik

$$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2).$$

Likningen $f'(x)=4$ er ekvivalent til $3x^2-2x-4=0$. Løsningene er $x=(1\pm\sqrt{13})/3$.

Tangentlinjene er

$$\underline{y=4(x-(1+\sqrt{13})/3)+f((1+\sqrt{13})/3)}\quad\text{og}\quad\underline{y=4(x-(1-\sqrt{13})/3)+f((1-\sqrt{13})/3).}$$

Vi har at

$$f((1\pm\sqrt{13})/3)=\frac{2(7+\sqrt{13})(\pm\sqrt{13}-2)}{27}.$$

8

For hver $a\geq 0$ finn korteste avstand fra (punktene på) grafen til $y=\sqrt{x}$, for $x\geq 0$, til punktet P, med koordinater $(a,0)$, på x-aksen. Finn også punktene på grafen som er nærmest P.

LF: Vi finner en avstandsfunksjon $L(x)$ som gir oss avstanden fra punktet $(x,\sqrt{x})$ på grafen til punktet $(a,0)$ på x-aksen.

Ved Pytagoras sin sats er kvadratet av avstanden lik

$$L^2(x)=(x-a)^2+(\sqrt{x})^2=x^2-2ax+a^2+x=x^2+(1-2a)x+a^2$$

definert for $x\geq 0$.

Siden kvadratfunksjonen er økende og avstanden ikke kan være negativ, så er L minst mulig når L^2 er minst mulig.

Vi ser at når $0\leq a\leq 1/2$ så er $(1-2a)$ ikke-negativ og derfor er $L^2=x^2+(1-2a)x+a^2$ minst når $x=0$. Hvis $a>1/2$ er minimumspunktet til parabelen

$$x^2+(1-2a)x+a^2=(x-(2a-1)/2)^2-((2a-1)/2)^2+a^2$$

minst når $x = a - 1/2$. Avstanden kvadrert er da lik

$$a^2 - ((2a-1)/2)^2 = a - 1/4$$

så avstanden er lik

$$\sqrt{a - 1/4}.$$

Dette kan man selvsagt finne ved å derivere (kvadratet) av avstandsfunksjonen i stede for å fullføre kvadratet. En annen fremgangsmåte vil være å observere at avstanden er kortest i punkt hvor tangentlinjen står vinkelrett på linjen fra $(a, 0)$ til punktet på grafen.

Vi kan oppsummere avstandsfunksjonen som en funksjon med delt forskrift

$$\underline{L(x) = \begin{cases} \sqrt{a - 1/4} & x \geq a/2 \\ a & 0 \leq x \leq a/2 \end{cases}}$$

Og det nærmeste punktet på grafen er origo $(0, 0)$ hvis $a \leq 1/2$, og det er $(a - 1/2, \sqrt{a - 1/4})$ hvis $a > 1/2$.

9

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2 y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

LF:

Setter vi $(3, 2)$ inn i uttrykket får vi

$$3^3 - 2^2 \cdot 3 - 2^4 + 7 = 27 - 12 - 16 + 7 = 0$$

så likningen er oppfylt for $(3, 2)$ og punktet ligger i løsningsmengden til likningen.

Implisitt derivasjon gir

$$3x^2 - 2xy - x^2 y' - 4y^3 y' = 0.$$

Vi isolerer y' og får

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^3}$$

I punktet $(3, 2)$ er derfor

$$\frac{dy}{dx}(3, 2) = \frac{27 - 2 \cdot 3 \cdot 2}{3^2 + 4 \cdot 2^3} = \frac{15}{41}.$$

Tangentlinjen er gitt ved ettpunktsformelen

$$\underline{y = \frac{15}{41}(x - 3) + 2}$$

Tegn gjerne kurven opp i geogebra, samt tangentlinjent. (Du behøver bare skrive inn likningen i geogebra. Forsøk gjerne førs med noe enklere som $x^2 + y^2 = 4$ for å forsikre deg om at det virker.)

10

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Invendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er 3/4 av høyden til kulen (det vil si 3/2 ganget med radius til kulen).

LF: Betegn radius til kulen med R. Den er oppgitt til å være 1 meter. Volumet til halve kulen er lik halve volumet til en kule

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} = 2.094m^3.$$

Det tar $60^2 s = 3600s$ å fylle opp halve kulen. Siden enringsraten er konstant er den lik gjennomsnittlig væskestrøm som er

$$2.094m^3/3600s = 0.0005817m^3/s = 0.5817dm^3/s.$$

($1m = 10dm$ så $1m^3 = 10^3 dm^3 = 1000dm^3$. En kubikkdesimeter kalles også en liter.)

La væskevolumet når væskeoverflaten har høyde h fra bunnen være $V(h)$. Vi har regnet ut at endringsraten til volumet med hensyn til tiden er

$$\frac{dV}{dt} = 0.5817dm^3/s$$

Vi benytter kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $V(h(t))$ og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Her har vi koblet sammen enringsratene til V og h. Hvis vi kan finne $\frac{dV}{dh}$ så kan vi fra første del av oppgaven også finne endringsraten til h med hensyn til tiden t.

Hadde vi hatt et uttrykk for $V(h)$ kunne vi ha derivert uttrykket og funnet $\frac{dV}{dh}$. Alternativt kan vi observere at endringsraten er lik tverrsnittarealet til figuren i høyde h. (Forskjelen ΔV mellom $V(h+\Delta h)$ og $V(h)$ er volumet til en tynn plate med tykkelse Δh og areal på bunnplaten lik tverssnittarealet til figuren i høyde h. I grensen Δh går mot 0 vil kvotienten $\Delta V/\Delta h$ være lik tverssnittarealet i høyde h.)

Tverrsnittarealet er arealet til en disk med radius $r(h)$ som da er $\pi r^2(h)$. Fra Pytagoras får vi at $r^2(h) + (h - R)^2 = R^2$. Når $h = 3R/2$ er derfor tverrsnittarealet lik

$$\pi(R^2 - (R/2)^3) = 3\pi R^2/4 = 2.356m^2 = 235.6dm^2.$$

Vi får dermed at

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}.} = \frac{0.5817dm^3/s}{235.6dm^2} = 0.00247dm/s = 0.247mm/s$$

11

Vi ser fra eksemplene $\sin(x), \cos(x), x^n$ at den deriverte av en odde funksjon er en jevn funksjon og at den deriverte av en jevn funksjon er en odde funksjon. Dette gjelder faktisk generelt. Vis (forklar) hvorfor det er sant generelt. (Det ligger et notat om odde og jevne funksjoner på hjemmesiden under uke 5.)

LF: Anta at $j(x)$ er en jevn funksjon. Da har vi at $j(x) = j(-x)$ for alle x i definisjonsmengden.

Deriverer vi på begge sider av likheten ovenfor får vi ved bruk av kjerneregelen

$$j'(x) = j'(-x)(-x)' = j'(-x)(-1) = -j'(-x)$$

Derfor er $j'(x)$ en odde funksjon.

Anta at f er en odde funksjon. Da har vi $f(x) = -f(-x)$ for alle x i definisjonsmengden til fuksjonen. Deriverer vi begge sider får vi denne gangen

$$f'(x) = -f'(-x)(-x)' = f'(-x).$$

Derfor er den deriverte til en odde funksjon en jevn funksjon.

12

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervalet. Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen monotonitester etc.

Forsøk med Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1 \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} - 2 \quad x \geq 0$

c) $\arctan(x) - x - 1 \quad$ alle x

d) $x^3 + 2x - 2 \quad$ alle x

LF: a) Den deriverte til funksjonen er $2x - 1$. Den deriverte er derfor (ekte) positiv i hele intervallet. Fra monotonitetstesten er den derfor økende. Funksjonen kan derfor ikke treffe x-aksen mer enn en gang. Siden funksjonen er kontinuerlig og verdiene i 1 og 2 er henholdsvis -1 og 1 så gir skjæringssetningen at det finnes ett nullpunkt i intervallet.

Vi benytter Newtons metode og finner estimatet $\underline{1.618}$. (Det eksakte svaret er det gylne snitt $(\sqrt{5}+1)/2 = 1.61803398875\ldots$.)

b) Den deriverte er $1/2\sqrt{x+1} + 1/(3(\sqrt[3]{x})^2)$. Dette er positivt når x er positiv. Det er ikke definert når $x = 0$. Funksjonen er kontinuerlig for alle $x \geq 0$. Videre er funksjonsverdiene i 0 og 8 lik henholdsvis -2 og 3. Ved skjæringssetningen har funksjonen derfor akkurat en rot. Et estimat med Newtons metode gir $\underline{0.4804}$.

c) Den deriverte er lik

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Dette er negativt for alle x ulik 0. Det er lik 0 når x er lik 0. Derfor er funksjonen ekte avtagende og den har ikke mer enn ett nullpunkt. Funksjonen er kontinuerlig for alle x og videre er funksjonsverdien i -3 og 0 henholdsvis positiv og negativ. Ved skjæringssetningen er det derfor akkurat ett nullpunkt. Newtons metode gir oss følgende estimat $\underline{-2.132}$.

d) Den deriverte til $x^3 + 2x - 2$ er funksjonen $3x^2 + 2$, som alltid er positiv. Funksjonen kan derfor maksimalt ha ett nullpunkt. Siden funksjonsverdien i 0 er lik -2 og funksjonsverdien i 1 er lik 1 så finnes det ved skjæringssetningen akkurat ett nullpunkt mellom 0 og 1. Newtons metode gir oss estimatet $\underline{0.7709}$.

13

Her er et standard eksempel som viser at den deriverte ikke alltid trenger være en kontinuerlig funksjon. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 \sin(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

er deriverbar i alle punkt, men at den ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

(Det er et resultat at diskontinuitetene til den deriverte må være essensielle diskontinuiteter. Det finnes ikke en funksjon som har en derivert med hopp-diskontinuitet.)

LF: Fra definisjonen av den deriverte er $f'(0) = 0$: Den høyrederiverte er lik

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$$

og den venstrederiverte er opplagt lik 0. Den deriverte til $x^2 \sin(1/x)$ er $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Derfor er f deriverbar i alle punkt og

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

Denne funksjonen er ikke kontinuerlig i 0 siden $\lim_{x \to 0^+} \cos(1/x)$ ikke eksisterer.

14

Bestem koeffisientene $b_0, b_1, \ldots b_n$ slik at polynomet

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

har samme m-deriverte som $f(x)$ i punktet a for $m = 0, 1, 2, \ldots n$. (Den 0-deriverte til f i $x = a$ er bare funksjonsverdien i a, som er $f(a)$.)

Vis hvordan du bestemmer koeffisientene i polynomet.

LF: Vi deriverer polynomet m ganger og setter $x = a$. Den deriverte til $(x-a)^k$ derivert m ganger er lik 0 hvis $m > k$, Det er lik $m!$ hvis $k = m$ og det er lik

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)(x-a)^{k-m}$$

hvis $m < k$.

Derfor er den m-deriverte i $x = a$ av polynomet lik $m! b_m$. Siden dette skal være lik $f^m(a)$ så må

$$b_m = \frac{f^m(a)}{m!}$$

15

Bestem Taylor polynomet til $\frac{1}{1-x}$ rundt 0 til orden $1, 2, 3, 4, 5$ og gjerne generelt til orden n.

LF: Vi har

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$
$$P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$
$$P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$
$$P_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Generelt har vi

$$P_n(x) = \underline{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}$$

Feilleddet kan bestemmes nøyaktig. Det er

$$\frac{1}{1-x} - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

I de neste to oppgavene er det naturlig å benytte en Taylor ekspansjon til $f(x)$ om $x = a$. Vi antar at funksjonene som forekommer er minst 5 ganger deriverbare.

16

En nummerisk versjon av den andrederiverte til $f(x)$ i $x = a$ er

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Dere kan godt tenke på dette som resultatet av å finne den nummerisk deriverte

$$\frac{f'(a+h/2) - f'(a-h/2)}{h}$$

av $f'(a)$ ved å benytte nummerisk deriverte istede for $f'(a+h/2)$ og $f'(a-h/2)$.

Anta at f er minst 5 ganger deriverbar. Vis at denne tilnærming avviker fra $f''(a)$ med et feilledd som går mot null som h^2. Mer presist vis at:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left(f''(a) - \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \right) = -\frac{f^{(4)}(a)}{12}$$

LF:

Vi benytter Tayler rekken til f om a av orden 4.

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(2)}(a)(x-a)^2/2! + f^{(3)}(a)(x-a)^3/3! + f^{(4)}(a)(x-a)^4/4!$$

Avviket er begrenset av verdiene til $|f^{(5)}(c)(x-a)^5/5!|$ for en c mellom a og x.

$$f'(a \pm h) \simeq f(a) \pm f'(a)h + f^{(2)}(a)h^2/(2!) \pm f^{(3)}(a)h^3/(3!) + f^{(4)}(a)h^4/(4!)$$

Differansen

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)$$

er derfor lik

$$2f^{(2)}(a)h^2/(2!)) + 2f^{(4)}(a)h^4/(4!)$$

pluss et avvik av høyere orden. Deler vi med h^2 får vi

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f^{(2)}(a) + f^{(4)}(a)h^2/12$$

pluss høyere ordens ledd.

Dette viser også at

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left(f''(a) - \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \right) = -\frac{f^{(4)}(a)}{12}$$

17

I denne oppgaven skal vi forbedre den nummerisk deriverte.

For en gitt a la

$$A(h) = \frac{8(f(a+h) - f(a-h)) - (f(a+2h) - f(a-2h))}{12h}$$

Se gjerne geogebra demonstrasjonen linket til på hjemmesiden ("sekant- og tangentlinjer"). Vis at $A(h)$ gir en tilnærming til den deriverte til f i a med et avvik som går som h^4. Mer presist vis at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a) - A(h)}{h^4} = \frac{f^{(5)}(a)}{30}$$

LF:

Vi benytter Tayler rekken til f om a av orden 5.

$$f(a)+f'(a)(x-a)+f^{(2)}(a)(x-a)^2/2!+f^{(3)}(a)(x-a)^3/3!+f^{(4)}(a)(x-a)^4/4!+f^{(5)}(a)(x-a)^5/5!$$

Avviket er begrenset av verdiene til $|f^{(6)}(c)(x-a)^6/6!|$ for en c mellom a og x.

I differansene $f(a+h) - f(a-h)$ og $f(a+2h) - f(a-2h)$ kanseleres leddene med jevne potenser av h. Vi står igjen med

$$f(a+h) - f(a-h) \simeq 2(f'(a)h + f^{(3)}(a)h^3/3! + f^{(5)}(a)h^5/5!)$$

og

$$f(a+2h) - f(a-2h) \simeq 2(f'(a)2h + f^{(3)}(a)(2h)^3/3! + f^{(5)}(a)(2h)^5/5!) =$$

$$2(f'(a)2h + f^{(3)}(a)8h^3/3! + f^{(5)}(a)32h^5/5!)$$

Avviket er begrenset av en konstant ganget med $|h|^6$.

Vi regner ut $A(h)$ Til orden 5 får vi:

$$8\cdot 2(f'(a)h+f^{(3)}(a)h^3/3!+f^{(5)}(a)h^5/5!)-2((f'(a)2h+f^{(3)}(a)8h^3/3!+f^{(5)}(a)32h^5/5!) =$$

$$(16-4)f'(a)h+(8\cdot 2/3!-2\cdot 8/3!)f^{(3)}(a)h^3+(8\cdot 2/5!-2\cdot 32/5!)f^{(5)}(a)h^5$$
$$12f'(a)h+(-2/5)f^{(5)}(a)h^5$$

Her har vi benyttet at

$$8\cdot 2/5!-2\cdot 32/5! = \frac{2\cdot 2\cdot 4(1-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{-2}{5}.$$

Deler vi på $12h$ får vi

$$f'(a)+(-1/30)f^{(5)}(a)h^4$$

Fra dette følger det at

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a)-A(h)}{h^4} = \frac{f^{(5)}(a)}{30}.$$