Matte 1000 ELFE KJFE MAFE 1000
Øvinger til manag 12. september 2016

Oppgave 1

a) Benytt Eulers metode med steglenge 0.1 til å estimere funksjonsverdien $f(1.3)$ av løsningen til differensiallikningen

$$y' = x + y$$

med initialbetingelsen $y(1) = 1$.

b) Vis at den eksakte løsningen er $y(x) = 3e^{x-1} - x - 1$. Sammenlign verdien $y(1.3)$ med den du fikk i del a)

LF: Vi får da $x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, x_3 = 1.3$. Starter vi med $y_0 = 1$ får vi

$$y_1 = y_0 + y'(1) \cdot 0.1 = 1.200$$

$$y_2 = y_1 + y'(1.1) \cdot 0.1 = 1.4300$$

$$y_3 = y_2 + y'(1.2) \cdot 0.1 = 1.6930$$

Setter vi in uttrykket i differensiallikningen ser vi at den er oppfylt. Setter vi inn verdien $x = 1$ får vi $y(1) = 1$. (Uttrykket er modifisert slik at initialbetingelsen er oppfylt. Det sto opprinnelig $y(x) = 2e^{x-1} - x - 1$.)

Verdien i $x = 1.3$ er $y(1.3) = 3e^{0.3} - 1.3 - 1 = 1.7495$. Ikkje så værst, men feilen blir fort mye større hvis vi tar flere slike sted og ser på større x-verdier. Til opplysning tar vi ti ganger glere steg blir estimatet for $y(1.3)$ lik 1.7435, og tar vi 300 steg fra $x = 1$ til $x = 1.3$ får vi 1.7490

Oppgave 2

Vis at funksjonene $y(x) = Ae^{-kt}$ er løsningen til differensiallikningen

$$y'(t) = -ky(x)$$

Anta at $k > 0$, da beskriver differensiallikningen eksponentiell avtagning. Prosesser som er styrt av dette er for eksempel radioaktiv nedbryting. Hvorfor er dette en rimelig modell for radioaktiv nedbryting?

Se for eksempel 4.2 i boken (side 185). Les også gjerne wikipedia om karbon 14 metoden. (Søk for eksempel “karbondatering”. Engelsk utgave har mer informasjon).

Det er et konstant forhold mellom den radioaktive isotopen C14 og C12 (det er og noe C13) i levende organismer som tar opp karbon. Etter de dør vil andelen C14 avta pga. det nedbrytes (Til nitrogen N14 elektron og antinøytrino). Tiden det tar før andelen C14 er halvert er ca 5700 år. Den kalles gjerne halveringstiden og skrives $t_{1/2}$.

La A være forholdet mellom C14 og C12 i levende organisk materiale. Vis at forholdet ved tiden t år etter at organismen døde er

$$Ae^{-(\ln 2)t/t_{1/2}}$$

Anta at man finner et skjelett og måler verdiene til å være $0.78A$. Hvor gammel er da skjelettet?

LF: Deriverer vi funksjonen $y(x) = Ae^{-kt}$ så får vi $-kAe^{-kt}$. Dette er lik $-ky(x)$. Derfor er funksjonen en løsning til differensiallikningen $y'(t) = -ky(x)$.

Vi skal bestemme k slik at

$$Ae^{-kt_{1/2}} = A/2$$

Vi deler med A og tar logaritmen på begge sider.

$$\ln(1/2) = -\ln(2) = -kt_{1/2}$$

Dette gir at $k = \ln(2)/t_{1/2}$.

Vi skal finne tiden t slik at

$$Ae^{-(\ln 2)t/t_{1/2}} = 0.78A$$

Vi deler med A og tar logaritmen på begge sider. V isolerer t og får

$$t = t_{1/2}\frac{-\ln(0.78)}{\ln(2)} = 5700 \cdot 0.358 \simeq 2044$$

Skjelettet er rundt 2040 år gammelt.

Oppgave 3

Finn alle løsningene til differensiallikningene

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad y'' - 3y' + 3y = 0 \qquad y'' + 4y' = 0$$

LF: Løsningene er henholdsvis:

$$Ae^{x} + Be^{x/2}$$

$$e^{3x/2}(A\sin(\sqrt{3}x/2) + B\cos(\sqrt{3}x/2))$$

$$y' = Ae^{-4x} \text{ og } y = Ce^{-4x} + D$$