4. jan 2016

Komplekse tall

Lineær likning

(1)

$4x - 7 = 5$

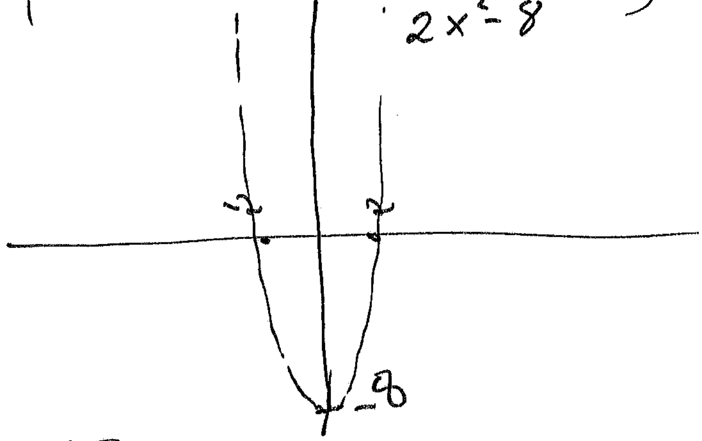
(påstand)

$4x = 5 + 7 = 12$

deler med 4: $x = \frac{12}{4} = 3$

Løsningen er $\underline{x = 3}$

(verdier som gjør påstanden $4x-7=5$ sann.)



Kvadratisk likning

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

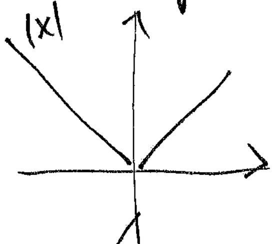
$x^2 = 4$

Løsningene er

$x = \sqrt{4} = \underline{2}$

$x = -\sqrt{4} = \underline{-2}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$



$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \\ |x| = 2 \quad \text{så} \quad x = -2 \text{ og } 2 \end{array} \right)$$

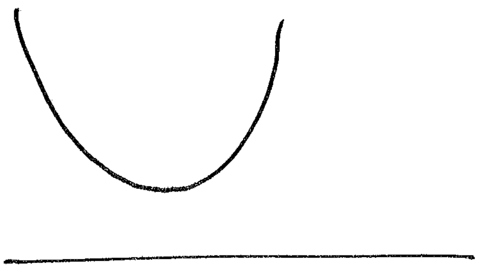
Faktorisering av $2x^2 - 8$

② $2(x^2-4) = 2(x-2)(x+2)$

Konjugatsetningen: $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$

ganger ut: $b(b-a) + a(b-a)$

$= b^2 \underbrace{- ab + ab}_{\text{Kryssleddene kansellerer hverandre}} - a^2 = b^2 - a^2$



$x^2+1=0$

Ingen løsning blant de reelle tallene.

(kan ikke faktoriseres som et produkt av polynomer av lavere grad.)

x^2+1 er et irredusibelt polynom over de reelle tallene.

Utvider de reelle tall $\mathbb{R}$ slik at x^2+1 har røtter (x^2+1 kan faktoriseres som et produkt av lineære polynomer)

$i^2+1=0$

$i^2=-1$

$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = i^2 = -1$

$\sqrt{-1}$ benyttes for i

(Vi gjorde et valg: men $-i$ er også en like god kandidat til $\sqrt{-1}$).

De komplekse tall $\mathbb{C}$

(3) $z = a + ib$ a, b reelle tall

a: realdelen til z b: imaginær-delen til z

$a = \mathrm{Re}(z)$ $b = \mathrm{Im}(z)$

(ikke $i \cdot b$!)

$$z = 3 - 4i = 3 + (-4) \cdot i$$

$\mathrm{Re}(z) = 3$

$\mathrm{Im}(z) = -4.$

Addisjon og multiplikasjon av komplekse tall er som for polynomer med variabel i hvor i^2 settes lik -1.

$$(2+3i) + (3-4i) = 2+3 + (3+(-4))i = 5 + (-1)i = \underline{5 - i}$$

$$\begin{aligned}(2+3i)(3-4i) &= 2\cdot 3 + 2(-4i) + 3i\cdot 3 + 3i(-4i) \\ &= 6 - 8i + 9i - 12\underbrace{i^2}_{-1} \\ &= 6 + (-8+9)i - 12(-1) \\ &= 6+12 + (1)i \\ &= \underline{18 + i}\end{aligned}$$

i

$i^2 = -1$

$i^3 = i(i^2) = -i$

(4) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^{17} = (i^4)^4 \cdot i$ $\quad (i^{16+1} = i^{16} \cdot i = (i^4)^4 \cdot i)$

$= 1^4 \cdot i = \underline{i}$

$i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = \underline{1}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\quad (r + 0 \cdot i \quad r \in \mathbb{R})$

(De reelle tallene er inneholdt i de komplekse tallene)

$\mathbb{C}$ utvider $\mathbb{R}$

Kompleks konjugasjon skifter ut
i med $-i$ (snur fortegnet til i)

$z = a + bi$

Den kompleks konjugerte: $\bar{z} = a - bi$

5 $\overline{(3-4i)} = 3+4i$

$\bar{3} = 3$ $\qquad \bar{i} = -i$.

$\bar{z} = z$ presis når $b = 0$, z er et reelt tall.

Egenskaper: $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

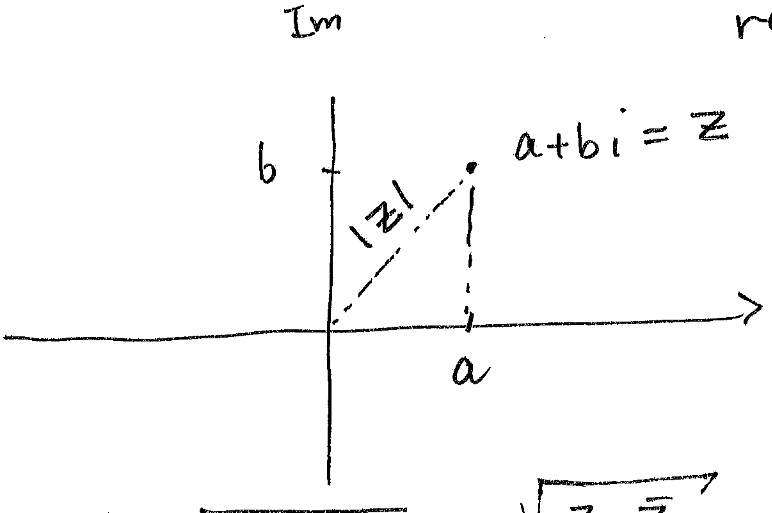
$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \qquad \mathrm{Im}(z)\cdot i = \frac{1}{2}(z - \bar{z}).$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2 \geq 0$$

reelt tall.

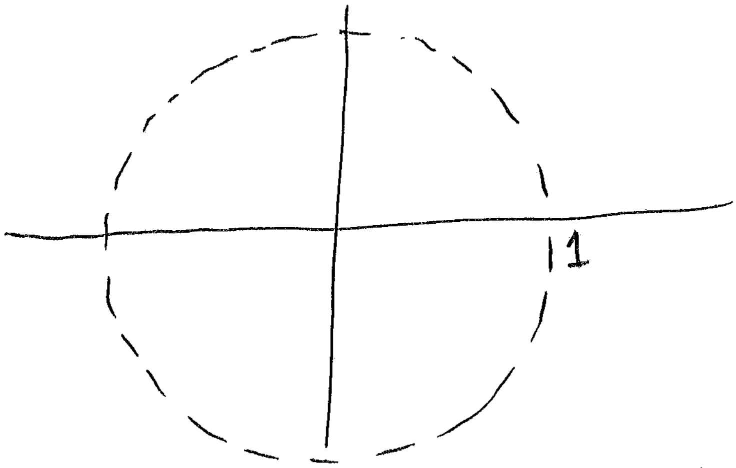


Komplekst plan

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ absoluttverdien til z.

$|z| = 0$ hvis og bare hvis $z = 0$.

$|z| = 1$



6

Løsningene er alle tall med avstand 1 til origo. (∞ mange løsninger)
Bare to reelle løsninger -1 og 1.

Alle komplekse tall ulik 0 har en multiplikativ invers.

$$\left(\frac{1}{1+i}\right) \cdot (1+i) = 1$$

hva er $\frac{1}{1+i}$?

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}} \quad z \neq 0.$$

$$\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \underline{\frac{1-i}{2}}$$

$$\underline{\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}} = \underline{\frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot i}$$

* $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = \underline{-i}$

$$(-i)\cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \checkmark$$

7 Sjekker :

* $\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{2^2+(-3)^2} = \underline{\frac{1}{13}(2+3i)}$

$$= \underline{\frac{2}{13} + \frac{3}{13} i}\,.$$

$$\underline{\frac{w}{z}} = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underline{\frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}}$$

Lineære likninger med komplekse tall

$$(2+i)z - 1 = i$$

Løsning:

$$(2+i)z = i+1$$

$$z = \left(\frac{1}{2+i}\right) \cdot (i+1) = \frac{i+1}{2+i} = \frac{1+i}{2+i}$$

$$z = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1\cdot(2-i) + i(2-i)}{2^2+1^2}$$

$$= \frac{2-i+2i-i^2}{5} = \underline{\underline{\frac{3+i}{5}}}$$

Forsøk gjerne matlab kommandoene

inv(...) , conj(...) abs(...) på komplekse tall

Løs $2z - i = 2iz$

$$2z - 2iz = i$$

$$(2-2i)z = i$$

$$z = \frac{i}{2-2i} = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{i(1+i)}{2\cdot(1+1)} = \frac{i+i^2}{2\cdot 2}$$

8

$$z = \frac{-1+i}{4}$$