18 januar 2016

Lineær algebra

Matlab — Data PI 556

Bygg PH 330

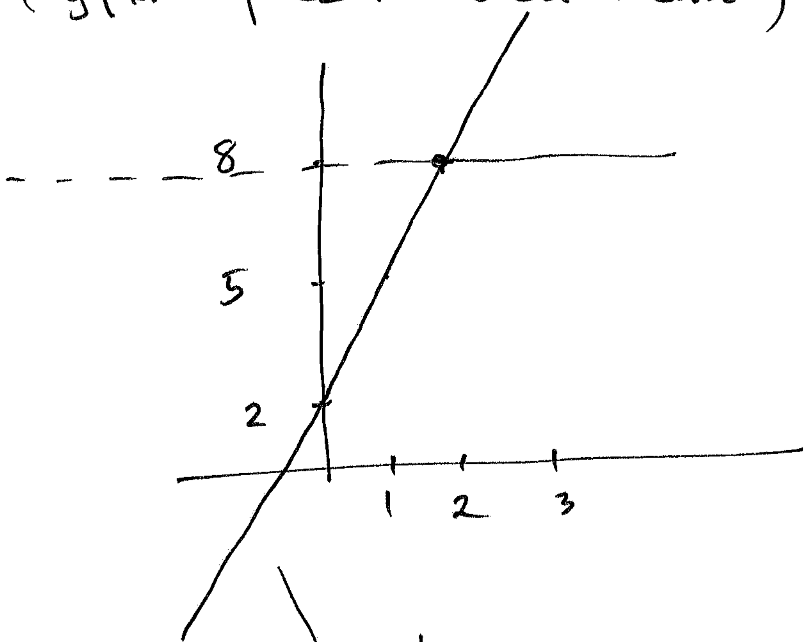
(1)

neste gang kap 3 plotting.

En lineær likning.

én variabel $\quad 3x + 2 = 8$

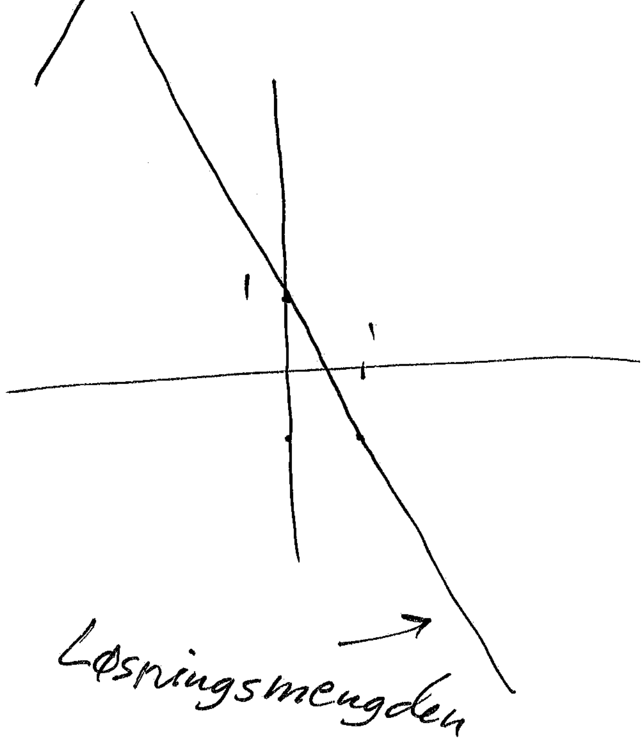
Løsning $\quad x = 2 \quad$ (gjør påstanden sann)



to variabler

$$2x + y = 1$$

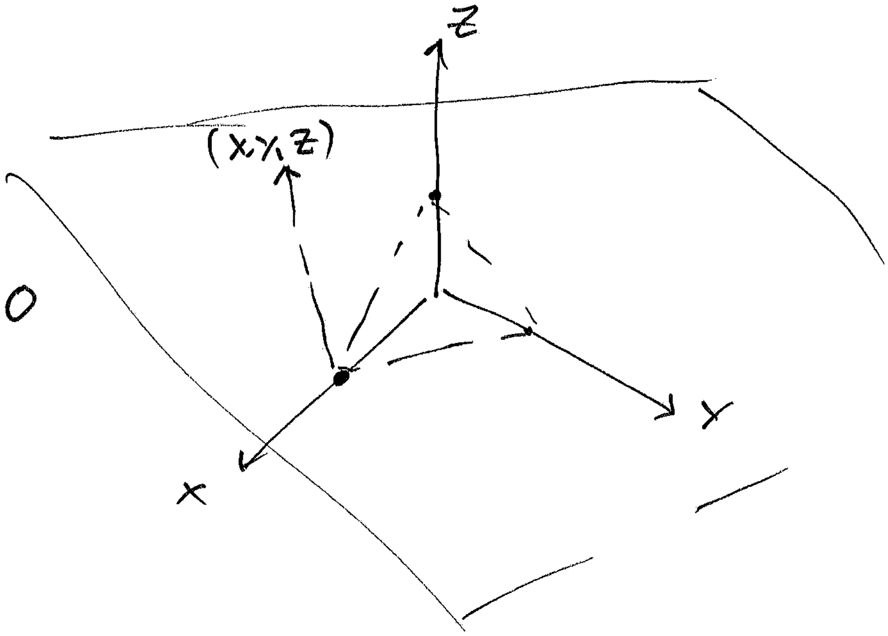
$$y = 1 - 2x \quad \text{(ekvivalente)}$$



tre variabler

$x + y + z = 1$

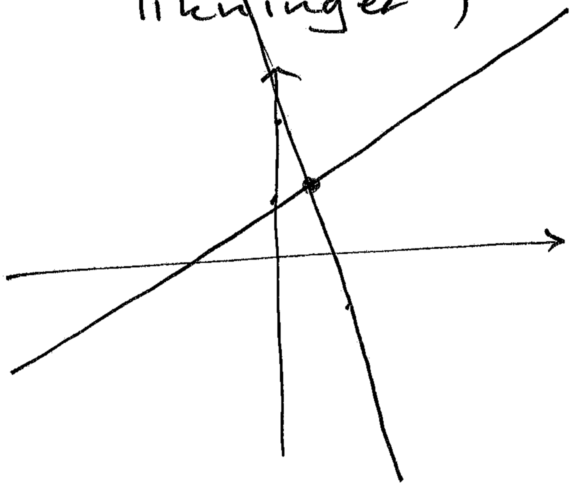
$\overrightarrow{(1,0,0)\ (x,y,z)} \cdot [1,1,1] = 0$



2

Lineære likningssystem

(flere lineære likninger)



2 variabler 2 likninger

Typisk : én løsning
(ikke-parallelle linjer)

$y - x = 1$

$y + 2x = 3$

trekker likning 1 fra likning 2

$(y-y) + 2x - (-x) = 3 - 1$

$3x = 2$ deler med 3

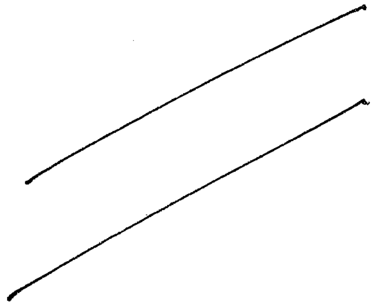
$x = 2/3 \sim 0.66$

$y = 1 + x = 1 + 2/3 = 5/3 \sim 1.66$

Løsningen er $\underline{x = \frac{2}{3},\ y = 5/3}$

parallelle linjer

3



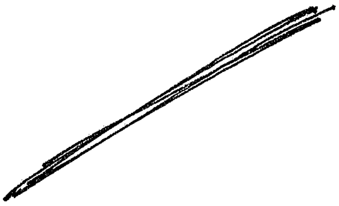
ingen løsninger!

løsningsmengden er tom.

$$x - y = 1$$
$$2x - 2y = 3$$

Trekker 2 kopier av likning 1 fra likning 2:

$0 = 3 - 2 = 1$ (ikke sant for noen x og y)

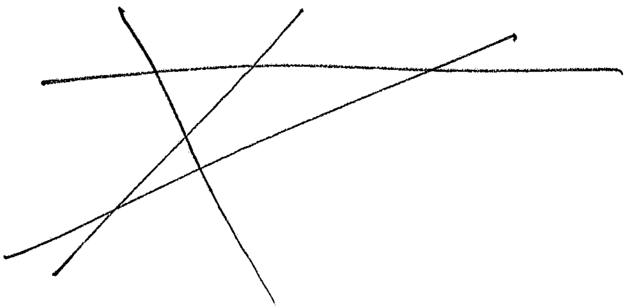


linjene overlapper

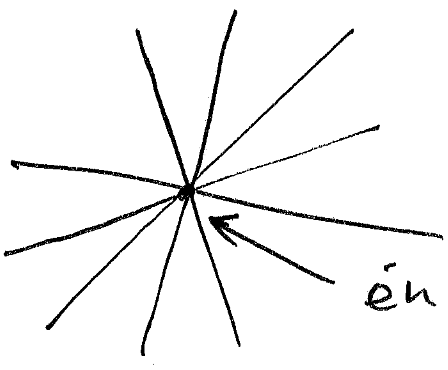
$$2x + y = 3$$
$$6x + 3y = 9$$

Løsningsmengden er en linje.

2 variabler mer enn 2 likninger



typisk ingen løsning.



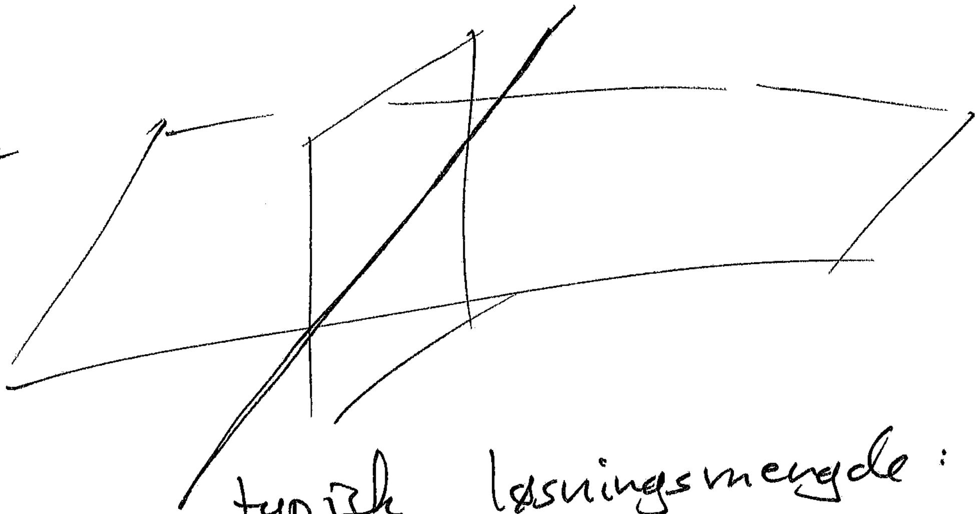
én løsning.

alle likningene beskriver samme linje: uendelig mange løsninger.

tre variabler

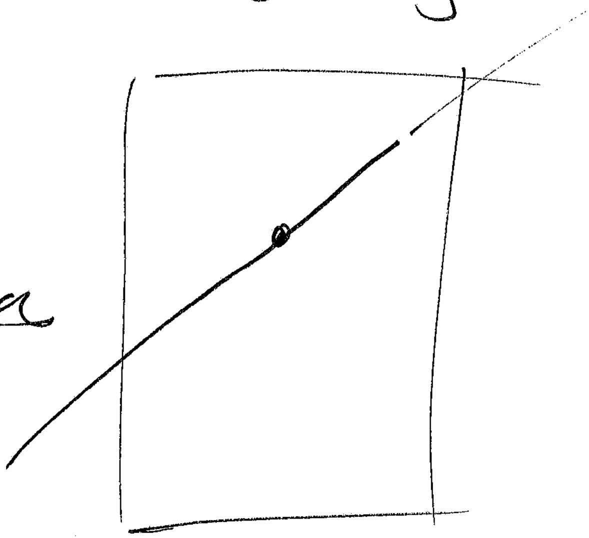
to likninger

4



typisk løsningsmengde:
en linje

tre likninger
typisk <u>én løsning</u>



Generelt lineært likningssystem

n variable og m likninger

(5)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Resultat: Et lineært likningssystem har én løsning eller vendelig mange løsninger (konsistent), eller ingen løsning (inkonsistent).

Koeffisientmatrisen til likningssystemet

m×n-matrise

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

antall elementer $m \cdot n$

RADER

KOLONNER

SØYLER

Utvida (koeffisient)matrisen
kalles også Totalmatrisen

(6) $$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Definisjon

Radoperasjoner

1) Bytte to rader
2) Skalere en rad (gange med tall ulik 0)
3) Legge en rad til en annen rad.

Radoperasjonene endrer ikke løsningsmengden til et likningssystem.

To likningssystem er (rad-)ekvivalente hvis de er relaterte med radoperasjoner.

Vi benytter $\sim$ mellom to utvida koeffisientmatriser hvis de er ekvivalente.

Eksempler

(variabler x, y, z)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

7

$x = 2$

$y = -3$

$z = 0$

"ferdig løst likningssystem"

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x = -1$

$z = 3$

y vilkårlig reelt tall.

"y er en fri variabel".

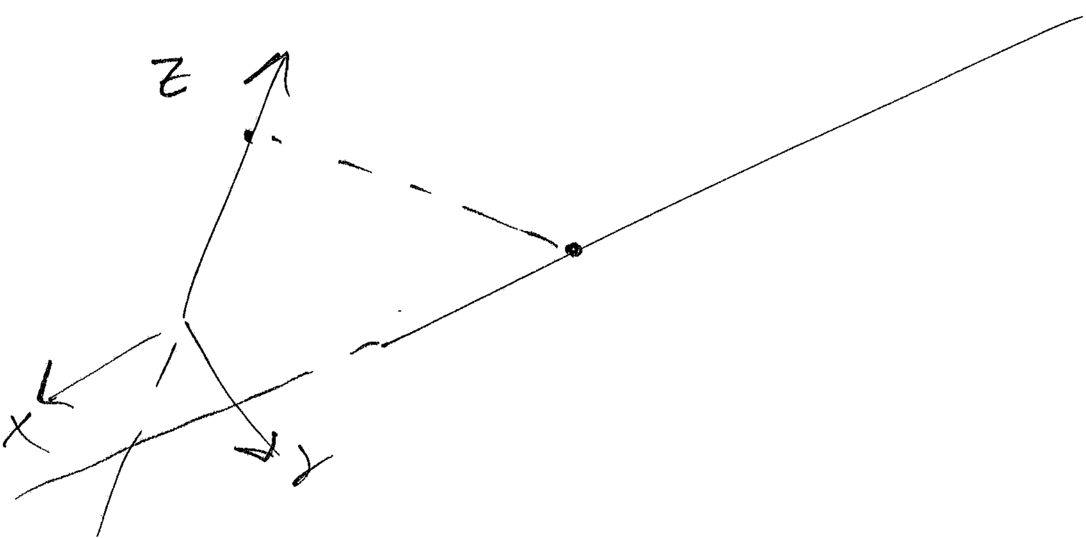
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x \quad\; + 2z &= 3 \\ y + z &= 4 \end{aligned}$$

x, y er gitt som funksjoner av z:

Løsningsmengden: $(3-2z,\ 4-z,\ z) \qquad z \in \mathbb{R}$

Parametrisert linje.



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

8

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$0=3$ aldri sant

Tom løsningsmengde.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$x+2y=4$

$\underline{y=-5}$

$x = 4-2y = 4-2(-5) = 14$

Løsningsmengden er $\underline{(14,-5)}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{array}\right] 2$$

$2x+3y=1$

$4x-y=-2$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & -4 \end{array}\right] \cdot \left(\frac{-1}{7}\right)$$

$(-7y=-4$ gir $y=\frac{4}{7})$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4/7 \end{array}\right] \cdot 1/2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & 4/7 \end{array}\right] \cdot 1/2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5/14 \\ 0 & 1 & 4/7 \end{array}\right]$$

Så $x=\frac{-5}{14}$

$y=\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$

(9)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ y + 2z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 13 \end{aligned}$$

Vi benytter radoperasjoner til å løse likningssystemet.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \cdot \tfrac{1}{3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] -2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Løsningen er:

$x = 1$

$y = 2$

$z = 3$