1 feb 2016

Determinanter

1) er definert for kvadratiske matriser. Determinanten til en kvadratisk matrise M skrives som $\det(M)$ eller $|M|$

En av grunnene til at determinanter er viktige er følgende resultat:

$$\det M \neq 0 \iff M \text{ har inversmatrise.}$$

Løsningen til et likningssystem

$M\vec{x} = \vec{b}$ er veldig ustabil (m.h.t endringer i $\vec{b}$) hvis $\det(M)$ er liten i forhold til elementene i M.

Abstrakt definisjon av determinanter

$$M = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix}$$

$\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ er n-vektorer.

det er den entydige funksjonen på n n-vektorer slik at

1) Funksjonen skifter fortegn ved bytte av to vektorer
2) Funksjonen er lineær i hver av vektorene
3) Funksjonen anvendt på $\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix}$ gir 1.

(2)

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix}$$

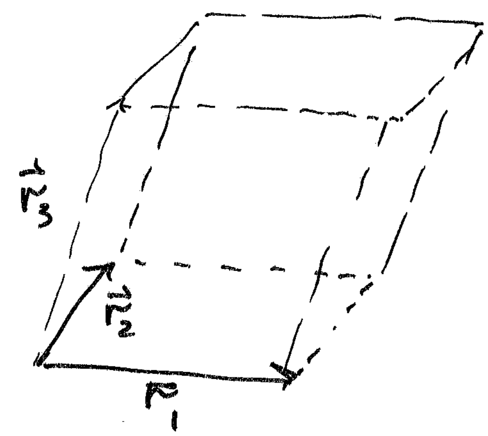
$$\begin{vmatrix} \vec{r}_1 \\ -5\vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \mathbb{1}_3 \right| = 1$$

Geometrisk fortolking

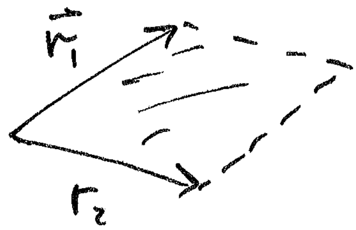
$$\left| \det \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix} \right|$$

volumet til parallellepipedet.

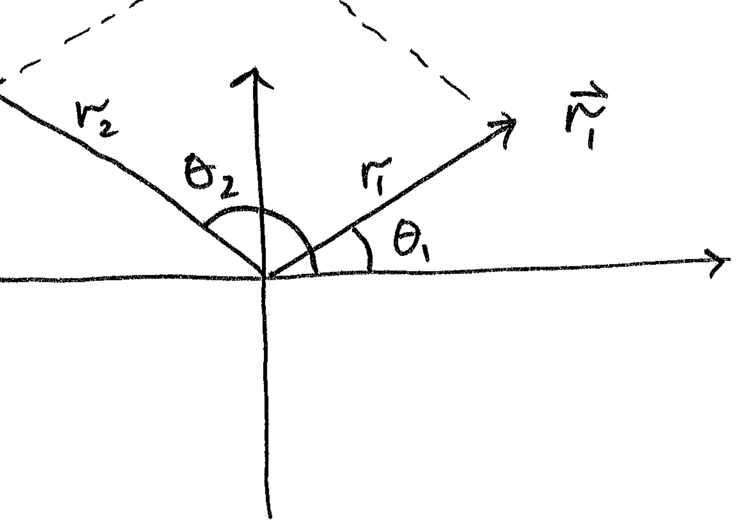


$$\left| \det \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \right|$$

Areal til parallellogrammet



3



Arealet til parallellogrammet er:

$$A = r_1 \cdot r_2 \left| \sin(\theta_2 - \theta_1) \right|$$

$$\vec{r}_1 = [r_1 \cos\theta_1 ,\ r_1 \sin\theta_1]$$

$$\vec{r}_2 = [r_2 \cos\theta_2 ,\ r_2 \sin\theta_2]$$

$$\det \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos\theta_1 & r_1 \sin\theta_1 \\ r_2 \cos\theta_2 & r_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left(\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left(\cos(-\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(-\theta_1) \cos(\theta_2) \right)$$

$$= \underline{r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad \text{(addisjonsformelen for sinus)}$$

Dette viser at $\left| \det \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} \right| =$ arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$

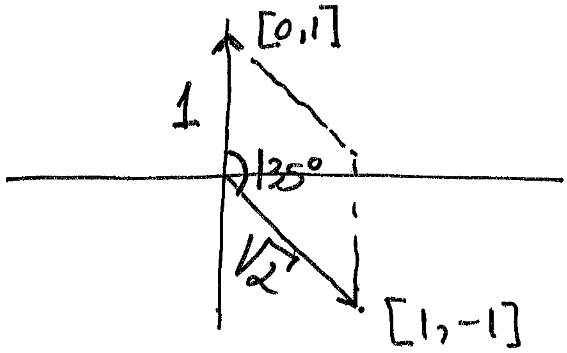
Fortegnet til $\det \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix}$ er positivt hvis vi roterer i positiv retning (korteste vei) fra $\vec{r}_1$ til $\vec{r}_2$.

(4)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = 0(-1) - 1 \cdot 1 = -1.$$

Geometrisk:

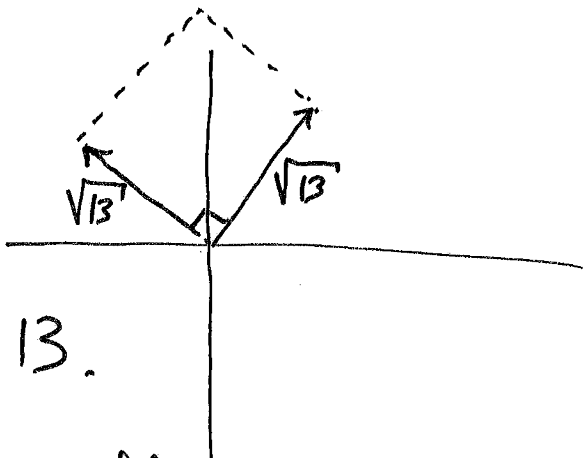


Arealet er $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sin(135°)}_{1/\sqrt{2}}$

$$= \underline{1}$$

(Rotasjonen fra [0,1] til [1,-1] er negativ)

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$



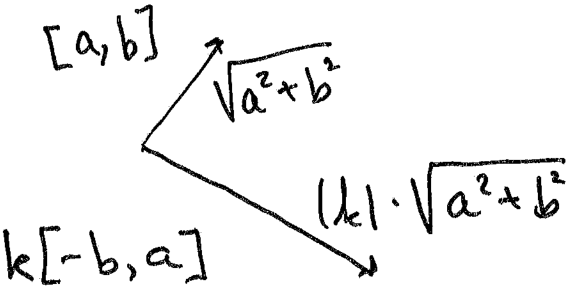
$$\det M = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 3 = 13.$$

Generelt to vinkelrette vektorer

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ -b \cdot k & a \cdot k \end{bmatrix} = a(ak) - b(-bk)$$

$$= k(a^2 + b^2).$$

opp til fortegn arealet av parallellogrammet



5 Determinanter og radoperasjoner

1. Skalering av en rad med en skalar k

$$\det \begin{bmatrix} k\vec{r}_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

2 Legger vi et skalarmultiplum av en rad til en annen endres ikke determinanten.

$$\det \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 + k\vec{r}_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \underbrace{k \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}}_{0}$$

(det til $\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ er null siden matrisen er uendret under bytte av rad 1 og rad 2. Determinanten skal skifte fortegn under bytte. Derfor må den være 0)

3. Bytte av to rader skifter fortegn på determinanten.

⑥ Dette gir en metode for å regne ut determinanter.

$$M \underset{\text{rad.op}}{\sim} T \quad \text{redusert trappeform}$$

Hvis $T = \mathbb{1}_n$

$$\det(M) \cdot \left(\begin{array}{l}\text{produktet av alle} \\ \text{skalaren vi har} \\ \text{ganget rader med}\end{array}\right) \cdot (-1)^{\#\text{radbytter}} = \det(\mathbb{1}_n) = \underline{1}$$

$$\det(M) = \frac{(-1)^{\#\text{radbytter}}}{\text{prod. av skalaren vi har ganget rader med}}.$$

Hvis $T \neq \mathbb{1}_n$ (og på redusert trappeform), da vil T ha en 0-rad og $\det(M) = 0$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{M} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot (-\frac{1}{5}) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(M) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right) = \det(\mathbb{1}_3) = 1$$

$$\det(M) = -2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-30}}$$

7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \quad (-2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot \frac{1}{3} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \quad (-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_3$$

$$\det(A) \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \det(\mathbb{1}_3) = 1$$

$$\det(A) = \frac{1}{-1/3} = \underline{\underline{-3}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-5) \\ \end{matrix} \quad -2 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (-4)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0$$

determinanten er 0

(lineariteten til det gir at $\det(T) = k\det(T)$ for alle konstanter k (skaler 0-raden med k). Derfor er $\det(T) = 0$ hvis T har en 0-radvektor.)

8 Hint til oblig 2 oppg 4.

4. grads polynom

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Bestem a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 slik at

$q(-2) = 3$ etc.

For eksempel
$$q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$$
$$q(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 11$$
etc

Se forelesningsnotat fra H15 eller V15.
notatet 'linear algebra'