3jan 2016

1)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

6 likninger i $a_0, \ldots, a_5$

$p(1.234) = 5.423$ etc.

Hint til obl 2 oppg 4

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_6 & x_6^2 & \cdots & x_6^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix} = y^T$$

$$[\ , x^T, (x^{.\wedge 2})^T, \quad (x^{.\wedge 5})^T]$$

2

Eksamen august 2014

Løser denne oppgave.

b) La D, E og F være tre $n \times n$ matriser. Løs følgende likning med hensyn på X

$$D(D+X) = E^2(X+F)$$

når det er kjent at matrisen $D - E^2$ er invertibel.

c) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= 4 \\ ax_1 + ax_2 &= b \ , \end{aligned}$$

bestem parametrene a og b slik at systemet har

i) entydig løsning.
ii) uendelig mange løsninger.
iii) ingen løsning.

Oppgave 4

Vi har en transformasjon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ .$$

Transformasjonen er en komposisjon av en forlengelse (multiplikasjon) med en faktor 2 som virker på vektoren $\mathbf{x}$, etterfulgt av en rotasjon med vinkelen $\frac{\pi}{2}$ mot urviseren. Angi standardmatrisen til transformasjonen.

Oppgave 5

Tabell 1: Data for vannstrøm

t (s)	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
ϕ (m^3/s)	1,64	1,94	2,30	2,71	3,21	3,79

a) Vi observerer vann som passerer et bestemt punkt. Tabell 1 viser strømningshastigheten til vannet, ϕ, når det passerer ved ulike tidspunkter, t. Med strømningshastighet mener vi hvor stort volum med vann som passerer punktet vi observerer per tidsenhet. Regn ut en tilnærmet verdi for endring per tidsenhet i strømingshastighet ved tida $t = 2$ s.

b) Regn ut den totale vannmengden som har passert mellom $t = 1,50$ s og $t = 4,00$ s.

Hint
oblig 2
oppg 3

$M = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & a \end{bmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}$

$M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{b}$ likningssystemet

3) $\det(M) = 2 \cdot a - 6 \cdot a = -4a.$

$\det(M) = 0 \iff a = 0.$

$a \neq 0.$ $\det(M) \neq 0.$ M er inverterbar
$(\sim I_2)$

$$\underbrace{M^{-1} \cdot M}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M^{-1}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M^{-1}\vec{b}$$

éntydig løsning for $a \neq 0$ og alle b.

$a = 0$ Totalmatrisen $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & b \end{array}\right]$

rad 2: $\underbrace{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2}_{0 \text{ for alle } x_1, x_2} = b$

$a = 0$
og $b \neq 0$ ingen løsning.

$a = 0$
og $b = 0$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1 + 3x_2 = 2$
(delt Rad 1 med 2)

Uendelig mange løsninger. $\quad x_1 = 2 - 3x_2$
parametrisering x_2 fri

Determinanter

Eksempel

4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (-2) \quad (-2) \quad (-5)$$

Benytter radoperasjoner til å regne ut det(A).

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(\frac{1}{4}\right) \\ \cdot\left(\frac{-1}{5}\right) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen har determinant 1

$$\det(A) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) \cdot (-1)^3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$\underline{\det(A) = 20}$$

(

1×1 matrise $\quad [4] \cdot \frac{1}{4} = [1]$ identitetsmatris

$$4 = \det[4] = \frac{\det[1]}{1/4} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10. \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 1/2 \\ \cdot 1/5 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

)

(mer)

Egenskaper til determinanter

$\det(A) \neq 0 \iff A$ på redusert trappeform er $\mathbb{1}_n$ $\iff A$ er inverterbar

5

$$\det(A^T) = \det(A)$$
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Konsekvenser

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$$

Anta $\det(A) \neq 0$ $\qquad \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}.$

$$\left(\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \mathbb{1}_n \\ \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(\mathbb{1}_n) = 1 \\ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) &= 1 \end{aligned} \right)$$

$$\det(A^{14}) = (\det A)^{14}$$

generelt $\qquad \det(A^n) = (\det A)^n \qquad n$ heltall.

Eksempel $\qquad \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{11}\right) = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{11}$

$$= (1 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^{11} = (-1)^{11} = \underline{\underline{-1}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6

Determinanten til $(n-1)\times(n-1)$-matrisen som fremkommer ved å fjerne rad i og kolonne j kalles i,j-minor til A.

Matrisen med i,j-minoren til A som element i posisjon i,j kalles Minor-matrisen til A.

i,j kofaktoren til A er $(-1)^{i+j} \cdot$ i,j-minoren til A

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & i+j \text{ partall} \\ -1 & i+j \text{ oddetall} \end{cases}$$

Matrisen av i-j kofaktores skrive C.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \\ - & + & - & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ & & & & + \end{bmatrix}$$

Den adjungerte til A er den transponerte til kofaktormatrisen til A.

adj (A)

7

$$\mathrm{adj}(A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

(j,i - kofaktor) (j,i - minor)

Eksempel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Minor matrisen $M = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$

Kofaktor matrisen $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vi observerer at $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$.

Dette er faktisk gyldig for alle inverterbare matriser!

Rekursiv beskrivelse av determinanter

$$\det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

(kofaktor element i 1,1 til A)

8

determinanten til en $n \times n$ matrise beskrives fra determinanten til n $(n-1)\times(n-1)$-matriser.

(Antall regneoperasjoner $\sim n!$)

Eksempel $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 0 \cdot C_{11} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - (1\cdot 4 - 0 \cdot 3) + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2)$$

$$= -4 + 1 = \underline{\underline{-3}}$$

Alternativt bruker 1. kolonne:

$$\det(A) = 0 \cdot C_{11} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot C_{31}$$

$$= -(1 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = \underline{\underline{-3}}$$

Resultat: Vi kan benytte hvilke rad eller kolonne vi ønsker til å regne ut determinanten

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 16 + 12 = 0$$

9

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right) - \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 12 - (-8 + 0)$$

$$= \underline{\underline{20}}$$ (som tidligere)

Kramers regel.

A $n \times n$ - matrise

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$$

Anta $\det A \neq 0$ så det en unik løsning.

$$A_j(\vec{b}) = \det \begin{bmatrix} \vec{v}_1, \ldots, \underset{j}{\vec{b}}, \ldots \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

10

Kramers regel : $\boxed{x_j = \dfrac{A_j(\vec{b})}{\det(A)}}$

Kramers regel gir resultatet

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}}$$

$\xrightarrow{\text{eksempel}}$

(For forklaringer og bevis
se notatet om lineær algebra
og notater M1000 Høst 2015 uke 37)

(11) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)$$

Hvis A er en heltallsmatrise, da er $\operatorname{Adj}(A)$ også en heltallsmatrise.
(så $\det(A^{-1}) \cdot \det(A)$ er en heltallsmatrise hvis A er det.)

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= (7-10) + (-3)(4(-7))$$
$$= -3 - 3(-28) = -3(-28+1)$$
$$= 3\cdot(27) = \underline{81}$$

Minormatrisen:

$$M = \begin{bmatrix} -3 & -28 & 20 \\ -21 & -7 & 5 \\ 6 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \right)$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 28 & 20 \\ 21 & -7 & -5 \\ 6 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \underline{\frac{1}{81}\begin{bmatrix} -3 & 21 & 6 \\ 28 & -7 & -2 \\ 20 & -5 & -13 \end{bmatrix}}$$

(12)

Stabilitet til løsninger av lineære likningssystem

$$x + y = a$$
$$1{,}001 \cdot x + y = b$$

Koeffisientmatrisen $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}001 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(K) = 1 - 1{,}001 = -0{,}001$$

$K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Løsning : $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.001 \end{bmatrix}$ Løsning : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

liten endring gir stor endring i løsningene.