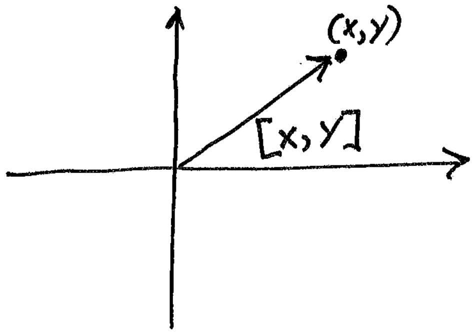
11 feb. 2016

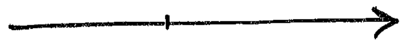
Vektorrom

1

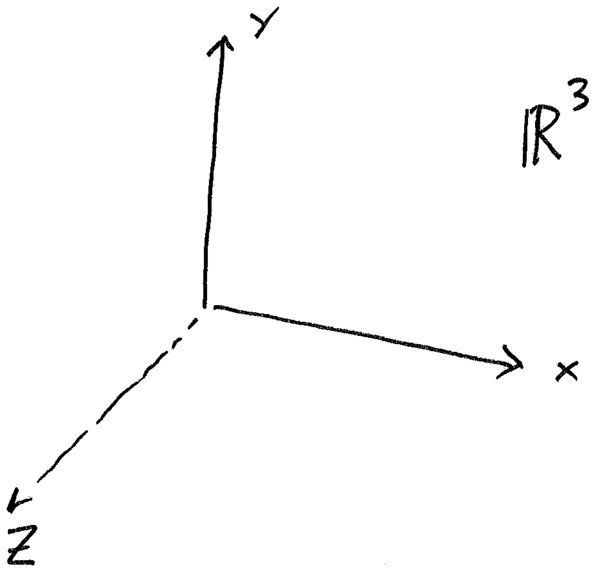


$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$



$\mathbb{R}^0 = 0$



$\mathbb{R}^3$

Rotasjon 90° om y-aksen $R_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rotasjon 90° om x-aksen $R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Først rot om y-aksen så x-aksen (90°)

standard matrisen er $R_x \cdot R_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Først rotasjon om x-aksen så om y-aksen (90°)

Standardmatrisen er $R_y \cdot R_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Aksiomatiserer vektorrom (abstrakt vektorrom)

(2) V mengde med sum
utvalgt element $\vec{0}$ (nullvektoren)

$$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

skalar multiplikasjon $k \cdot \vec{v}$ ny vektor

skalar, vektor

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
$$(k \cdot l) \cdot \vec{v} = k(l\vec{v})$$
$$(k+l)\vec{v} = k \cdot \vec{v} + l \cdot \vec{v}$$
$$k(\vec{v} + \vec{u}) = k\vec{v} + k\vec{u}$$

Polynomer av grad ≤ 2 er et vektorrom (av dim 3)

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \left(\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right)$$

Kan identifiseres med $\mathbb{R}^3$

Derivasjon er en lineær transformasjon

$$D : Pol_{\leq 2} \longrightarrow Pol_{\leq 2}$$
$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \longmapsto 0 \cdot x^2 + 2a_2 x + a_1 = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)'$$
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

standardmatrisen til derivasjonen $Pol_{\leq 2} \to Pol_{\leq 2}$:

③ $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), D\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), D\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]$$

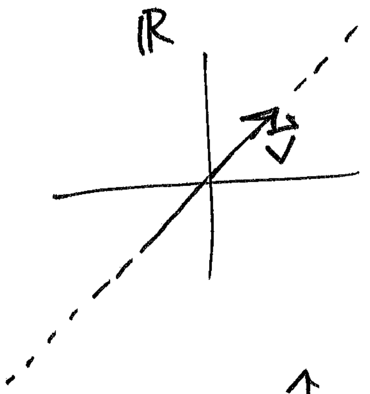
Underrom av vektorrom

$V \ (= \mathbb{R}^3)$ vektorrom

$U \subset V$ inneholt i V

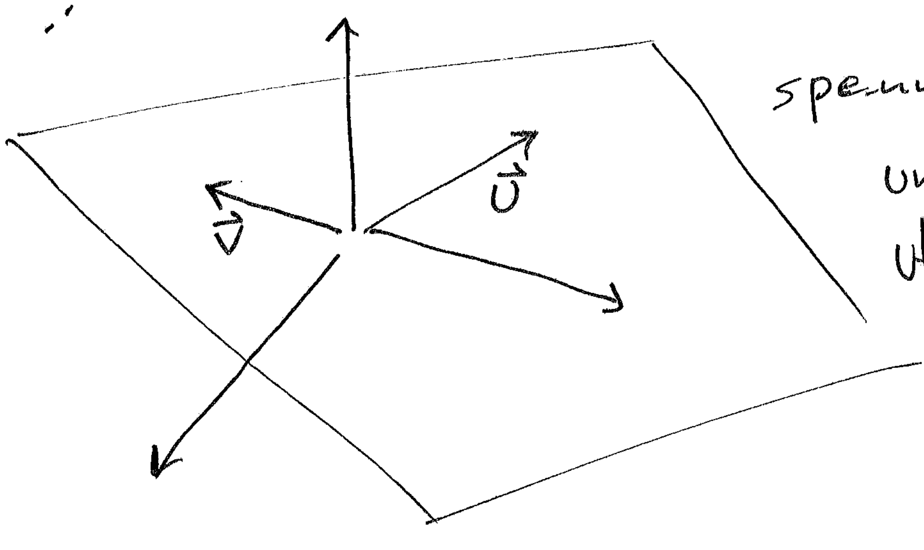
Hvis U er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon av vektorer i U, så er U et vektorrom.

Vi sier at U er et underrom av V



minste vektorrom som inneholder $\vec{v}$.
spenn $(\vec{v})$

(sum av to vektorer i U er i U og skalar mult. av vektorer i U er i U)



spenn $(\vec{u}, \vec{v})$
underrommet av $\mathbb{R}^3$ utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

vektorene i spenn $(\vec{u}, \vec{v})$ er på forma

$$x_1 \cdot \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

4

Dette kalles en linear kombinasjon av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengige :

hvis $x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$, da

må $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Hvis ikke sier vi at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er lineært avhengige vektorer. Dvs. at en vektor (minst én) kan uttrykkes som en lin kombinasjon av de andre. :

Hvis lin. avhengig så finnes x_1, x_2 og x_3 ikke alle lik 0 slik at $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

anta $x_1 \neq 0$: $\vec{v}_1 = -(x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3)$

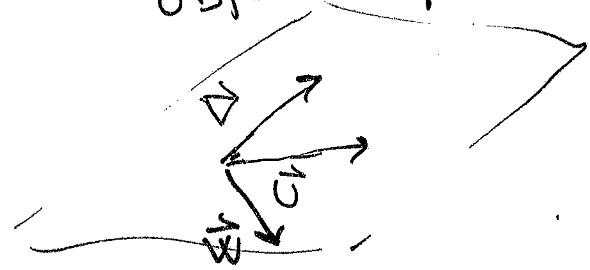
$\vec{v}_1$ uttrykt som lin. komb. av $\vec{v}_2$ og v_3.

Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er lin. uavhengige og $\vec{b} \in$ spenn$(v_1, \dots, v_n)$, da finnes entydige $x_1, \dots x_n$ slik at

$$\vec{b} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n.$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utspenner et plan



$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lin. uavh.

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

5

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bare mulig om $x = y = 0$.

La nå $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Er $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ lin. uavh.? Nei!

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$1 \cdot \vec{u} + (-1)\vec{v} + (-1)\vec{w} = \vec{0}$$

$\vec{w}$ er i spenn$(\vec{u}, \vec{v})$, planet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ radvektorer

Hvis $\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}$ på redusert trappeform har n rader alle forskjellige fra null-raden

$\Leftrightarrow$ vektorene er lin. uavhengige.

n - n-vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (radvektorer)

Lin. uavhengige $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} \neq 0$

6

En basis for et underrom U av V er lineært uavhengige vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ som utspenner underrommet U.

Dimensjonen til U er antall vektorer i en basis for U.

Eksempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$

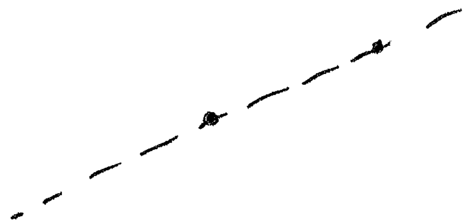
Dette er standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en annen basis for $\mathbb{R}^2$ (bestående av to vektorer av lengde $\sqrt{5}$ som står vinkelrett på hverandre).

Derimot er $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ikke en basis for $\mathbb{R}^2$.

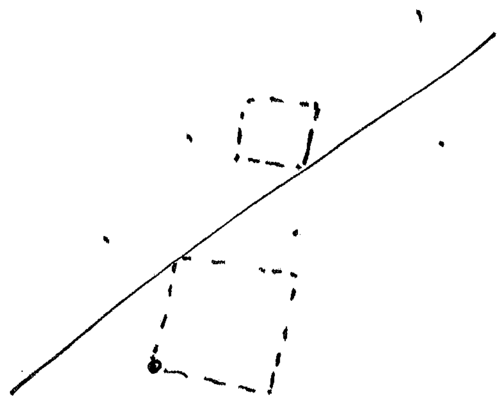
$$y = ax + b$$

Entydig løsning for to punkt (som ikke ligger over hverandre)



(7)

(x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots$ (x_n, y_n) n-punkter



Ønsker å finne linjen (linjene) slik at ~~sqs~~ summen av kvadraten til $(y_i - (ax_i - b))$ er minst mulig.

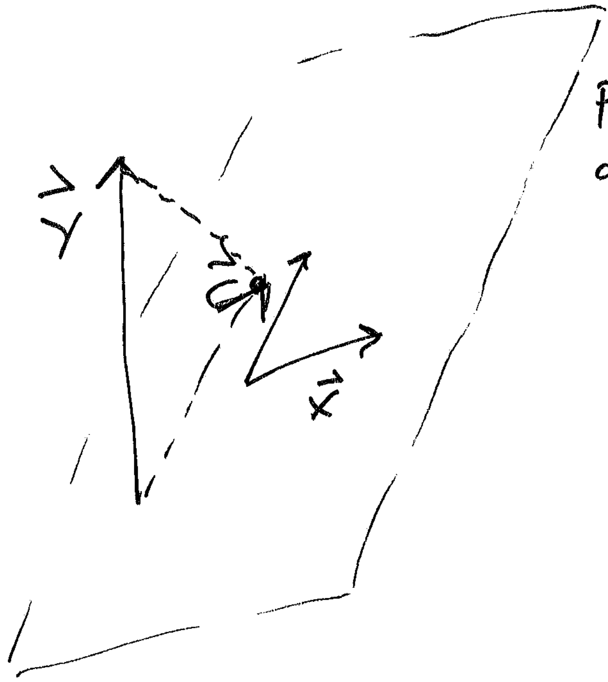
La

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ønsker a og b slik at

$$a\vec{x} + b \cdot \vec{c} = \vec{y}$$

(8)



planet utspent av $\vec{c}$ og $\vec{x}$ (i $\mathbb{R}^n$)

Projiseren $\vec{y}$ ned til spann$(\vec{x}, \vec{c})$.

Denne vektoren $\vec{z}$ i spann $(\vec{x}, \vec{c})$ er nærmest $\vec{y}$. Det finnes a og b slik at

$$\vec{z} = (a\vec{x} + b\vec{c})$$

Differansen $\vec{y} - \overbrace{(a\vec{x} + b\vec{c})}^{\vec{z}}$ står da vinkelrett på både $\vec{x}$ og $\vec{c}$. (planet)

$$M = [\vec{x}, \vec{c}] \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{v} \quad , \quad M^T = \begin{bmatrix} \vec{x}^T \\ \vec{c}^T \end{bmatrix}$$

$n \times 2$ $\qquad\qquad 2 \times n$

$$M^T \cdot (\overbrace{\vec{y} - M\vec{v}}^{\vec{z}}) = \vec{0}$$

siden ↗ er vinkelrett på $\vec{x}$ og $\vec{c}$

$\left(M^T \cdot z = \begin{bmatrix} \vec{x} \bullet \vec{z} \\ \vec{c} \bullet z \end{bmatrix} \right)$

Dette gir: $M^T \cdot y = \underbrace{(M^T \cdot M)}_{2 \times 2} \cdot \vec{v}$

Når $M^T M$ er inverterbar : $\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{v} = (M^T M)^{-1} (M^T \cdot y)}$