Lineær algebra

H. Fausk

11.02.2016

Sjuende utkast

Flere lineære likninger som samtidig skal oppfylles kalles lineære likningssystem. I prinsippet er løsing av lineære likningsystem enkelt, det benytter bare "de fire regneartene". I praksis blir det fort krevende fordi antall regneoeprasjoner som må utføres vokser raskt når antall variabler og likninger økes. Vi går gjennom noen veletablerte fremgangsmåter for å løse slike likningssystemer på en effektiv og oversiktlig måte. Disse metodene og begrepene rundt dem viser seg nyttig i andre sammenhenger enn bare for å løse likninger. Et fundamentalt begrep er lineære avbildninger mellom vektorrom. Likningsystemet svarer til spørsmålet: hvilke vektorer sendes til en gitt vektor i målrommet?

1 Lineære likninger

Et linært uttrykk er en endelig sum hvor hvert av leddene er en variabel ganget med en skalar[1]. For eksempel er $3x+(-5)y$ og $1x+(-2/3)y+\sqrt{2}z$ to linære uttrykk. Vi skriver gjerne disse uttrykkene, mer leselige, som henholdsvis $3x-5y$ og $x-2y/3+\sqrt{2}z$. En **lineær likning** er på formen et lineært uttrykk satt lik en skalar. For eksempel er $3x-5y=4$ en lineær likning i de to variablene x og y. Mens $x+y+z=0$ er en lineær likning i de tre variablene x, y og z. Hvis vi har mange variabler er det hensiktsmessig å bare bruke ett symbol for listen av variabler, og heller nummerere de ulike variablene i listen. Et eksempel på en likning i sju variabler x er

$$4x_1+(1)x_2+(-4)x_3+(-33.453)x_4+0x_5+(-3/7)x_6+(-1)x_7=43.47$$

Vi kan skrive denne likningen enklere som

$$4x_1+x_2-4x_3-33.453x_4-3/7x_6-x_7=43.47$$

Vi utelater ledd hvor koeffisienten er lik 0. Vi trenger heller ikke ta hensyn til at $3/7x_6$ skal missforståes som $3/(7x_6)$, fordi uttrykkene er lineære.

Er det n variabler x kan vi skrive dem opp som $x_1,x_2,\dots,x_n$. En generell lineær likning i disse variablene er på formen

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

[1] I andre sammenhenger er det vanlig å la et linært uttrykk være et polynom av grad 1 eller lavere. Det vil si at vi også tillater å legge til en skalar til et lineært uttrykk.

Her er $a_1, \dots, a_n$ **koeffisientene** til variablene og b er verdien som vi krever uttrykket skal være lik. Legg merke til at x og a opptrer likervedig i likningen, men de spiller forskjellige roller. Vi tenker på koeffisientene $a_1, \dots, a_n$ som gitte størrelser i hver likning og $x_1, x_2, \dots, x_n$ som de ukjente variablene som vi ønsker å finne verdier for (gitt en verdi av b). Her er summen skrevet opp ved bruk av summenotasjonen.[2]

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i$$

Dette leses som "summen fra i lik 1 til n av leddene a_ix_i".

Løsningene til en lineær likning med én variabel er alle verdier av variabelen som gjør påstanden i likningen sann. Løsningen kan enten bestå av akkurat ett tall, alle tallene (den reelle tallinjen) eller det kan også hende at det finnes ingen tall som gjør likningen sann. I det sistnevnte tilfellet sier vi at løsningen er tom. Det er og vanlig å si, noe selvmotsigende, at likningen har ingen løsning. Her er eksempler som realiserer disse tre tilfellene

$$2x = 5 \qquad 0 \cdot x = 0 \qquad 0 \cdot x = 1$$

Løsningen til en lineær likning med to variabler er typisk en linje, men den kan også være hele planet eller være tom. Detajene er overlatt til leseren.

Løsningen til en lineær likning med tre variabler er typisk et plan i rommet. Også her kan løsningen være hele rommet eller tom. Vi gir litt mer detaljer. La

$$ax + by + cz = e$$

være en lineær likning i de tre variablene x, y og z. Løsningene er hele rommet hvis alle fire koeffisientene er lik 0. Hvis bare e er forskjellig fra 0, er det ingen løsninger. Hvis derimot ikke alle a, b og c er lik null, da er løsningen planet som står vinkelrett på vektoren $[a, b, c]$ og som inneholder et punkt som svarer til en løsning til likningen.

Dette kan vi se som følger. Anta $ax_0 + by_0 + cz_0 = e$ for et punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Da er $P = (x, y, z)$ en løsning til likningen hvis bare hvis

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Denne likningen er det sammme som at skalarproduktet mellom vektoren $[a, b, c]$ og vektoren fra P_0 til P er lik 0. Så løsningene er alle punkt $P = (x, y, z)$ slik at vektoren fra P_0 til P står vinkelrett på $[a, b, c]$.

Oppgave 1 *Beskriv løsningen til en generell lineær likning*

$$ax + by = c$$

i to variabler x og y for ulike parametre a, b og c. Beskriv gjerne løsningene geometrisk som delmengder av xy-planet.

Oppgave 2 *Forklar hvordan alle linjer i xy-planet (også vertikale linjer) er løsningen til en passende lineær likning i variablene x og y.*

Oppgave 3 *Forklar hvorfor alle plan som inneholder origo er løsning til en likning*

$$ax + by + cz = 0$$

for passende koeffisienter a, b og c, ikke alle lik 0.

[2] Sigma $\sum$, er den greske bokstaven som svarer til vår (latinske) S. Brukt i summenotasjonen kalles den også summetegnet.

2 Lineære likningssystem

Et **lineært likningssystem** består av én eller flere lineær likning i et sett av variabler. For eksempel er

$$x + y = 0 \qquad x - y = 2 \tag{1}$$

et likningsstystem bestående av to likninger i to variabler x og y. Et annet eksempel er likningssystemet

$$x - 2z/5 = 3/4 \qquad -y + 12z = 13 \tag{2}$$

Her tenker vi da på begge likningene som likninger i de felles variablene x, y og z. Vi minner igjen om at utelatte forekomster av en variabel tenker vi på som 0 ganger variabelen. For eksempel er første likning lik $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-2/5) \cdot z = 3/4$.

En **løsning** til et likningssystem er verdier til variablene som gjør påstanden i *alle* likningene sanne. Løsningsmengden er derfor det mengdeteoretiske snittet av løsningene til hver av likningene.

Det første likningssystemet 1 ovenfor har akkurat én løsning. Geometrisk, svarer løsningen til punktet hvor de to linjene som er løsningne til hver av de to likningene, møtes (bare der er begge likningene oppfylt). I dette eksempelet er det punktet $(x, y) = (1, -1)$.

Det andre likningssystemet 2 ovenfor har uendelig mange løsninger. Løsningene er linjen hvor de to planene beskrevet av likningene møtes.

Her er et eksempel

$$x - y + 2z = 2 \quad y + 3z = -5$$

For hver verdi av z gir den andre likningen at $y = -5 - 3z$. Likning gir at da må $x = 2 + y - 2z$. Setter vi inn verdien $y = -5 - 3z$ får vi

$$x = 2 + (-5 - 3z) - 2z = -3 - 5z$$

Løsningene består derfor av punktene

$$(-3 - 5z, -5 - 3z, z)$$

for alle mulige reelle tall z. Dette er linjen som går gjennom punktet $(-3, -5, 0)$ og som er parallell til vektoren $[-5, -3, 1]$.

Oppgave 1 *Sjekk at løsningene til det andre likningssystemet ovenfor*

$$x - 2z/5 = 3/4 \qquad -y + 12z = 13$$

består av alle punktene som ligger på er linjen som er parallell til vektoren $[2/5, 12, 1]$ *og som går gjennom punktet* $(23/20, -1, 1)$.

Har vi to likninger med tre variabler, og løsningen til hver av likningene er plan som ikke er parallelle, så er løsningen linjen hvor de to planene møtes. Legger vi til en tredje likning vil løsningene være punktet hvor denne linjen snitter det tredje planet (hvis da linjen ikke ligger i det siste planet eller aldri møter det).

Oppgave 4 *Her er en fremgangsmåte for å finne løsningen til et likningsystem med tre ukjent og to likninger. Vi forutsetter at de to likningene bestemmer to ikke-parallelle plan. Sjekk at dette faktisk gir løsningen.*

Bestem normalvektorene til løsningsplanene til hver av likningene. (Dette er vektoren av koeffisienter.)

Finn deretter en vektor V som står vinkelrett på de to normalvektorene. (En slik vektor er kryss-produktet av de to normalvektorene.)

Finn et punkt P som ligger i begge planene. Dette kan reduseres til å velge en verdi for ene variabelen og så løse systemet med to likninger og de to gjennstående variablene. Dette må gjøres på en måte som garanterer at vi får en løsning.

Vi har nå en parametrisering av linjen. Den besår av alle punkt som ligger på linjen gjennom punktet P og som er parallell til vektoren V.

Vi innfører en notasjon som gjør det enklere å skrive opp likningssytem med mange variabler og likninger. Likningsystem med flere linkninger kan vi skrive opp som

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

hvor $i = 1, \ldots, m$ indekserer de m likningene. Her benytter vi en dobbel indeks på koeffisientene. Den første indeksen sier hvilke likning den tilhører og den andre indeksen hvilke variabel den er koeffisienten til. Her er et likningsystem med tre ukjente og to likninger

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2$$

Det er vanlig å skrive opp alle disse koeffisientene i en rektangulær **matrise**[3]. Denne matrisen kalles gjerne **koeffisientmatrisen**.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Matrisen har m (horisontale) rader og n (vertikale) kolonner. Vi sier at **dimensjonen** til matrisen er $m \times n$, eller at det er en $m \times n$-matrise. Matrisen består av $m \cdot n$ **elementer**. Elementet i rad i og kolonne j skriver vi med subskript hvor radnummeret kommer først. I matrisen ovenfor er elementet $a_{i,j}$ i rad i og kolonne j. To matriser $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er like hvis de har samme dimensjon og alle elementene i samme posisjon i matrisen er like $a_{i,j} = b_{i,j}$ for alle i og j.

En $1 \times n$-matrise kalles en **radvektor** av lengde n. Den er en horisontall liste av n elementer fra venstre til høyre. En $m \times 1$-matrise kalles en **kolonnevektor** (**søylevektor**). Den er en vertikal liste av m elementer ovenfra og ned. I en $m \times n$-matrise er det m rader og n kolonner (også kaldt søyler). På engelsk kalles de henholdsvis "row and column". Det er ofte nyttig å tenke på en $m \times n$ matrise som bestående av en liste av n søylevektorer fra venstre til høyre eller som en liste av m radvektorer ovenfra og ned.

[3]Sjekk etymologien for ordet matrise og les om historien til bruken av matriser.

Organiseringen av koeffisientene i en matrise er en effektiv måte å holde orden på dem og vi trenger ikke skrive opp variablene gjentatte ganger. Posisjonen til et element sier hvilken likning og hvilken variabel det tilhører. Elementet i posisjon i, j er koeffisienten til variabel nummer j i likning nummer i. For å beskrive et likningssystem er det og nødvendig å ta med skalarene som de lineære utrykkene skal være lik. Vi samler disse skalarene i en kolonnevektor. Den **utvida (koeffisient) matrisen** (også kalt **totalmatisen** eller den hele matrisen) til likninssystemet er koeffisientmatrisen sammen med denne kolonnevektoren, lagt til helt til høyre. Det kan være til hjelpe å lage et skille mellom koeffisientene og denne vektoren, for eksempel ved en vertikal linje slik som her.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

Utvida matriser svarer til likningssytem med en ordning på variablene (variabel nummer 1 2 etc) og en ordning på likningssettene (likningsset nummer 1 2 etc).

Oppgave 2 *Skriv opp koeffisientmatrisen og den utvida matrisen til de to likningssystemene i starten av denne seksjonen.*

Et likningssystem som har minst én løsning kalles for **konsistent**. Løsningsmengden til et konsistent likningssystem består enten av én løsning (et punkt) eller uendelig mange løsninger (linje, plan, rom, eller høyere dimensjonale varianter). Den kan ikke bestå av to løsninger slik som for eksempel løsningen til en kvadratisk likning som $x^2 = 4$. Likningssystemet kalles **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsninger.

Oppgave 3 *Anta at likningssystemet*

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2$$

har minst én løsning. Det tilhørende homogene likningsystemet er

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0$$

Vi kaller gjerne en løsning til det opprinnelige likningssytem for en ***partikulær løsning*** *og en løsning til det tilhørende homogene likninssytemet for en* ***homogen løsning****. Anta $z = [z_1, z_2, z_3]$ og $w = [w_1, w_2, w_3]$ er to partikulære løsninger til likningssystemet. Vis at da er differansen deres*

$$z - w = [z_1 - w_1, z_2 - w_2, z_3 - w_3]$$

en homogen løsning. Vis at vi finner alle løsningene til det opprinnelige likningssystemet ved å finne én partikulær løsning og legge den sammen med alle de homogene løsningene.

Vis følgende egenskaper som sier at løsningene til det homogene likningssytemet er et linært underrom av $\mathbb{R}^3$. Hvis $x = [x_1, x_2, x_3]$ er en homogen løsning, da er også

$$kx = [kx_1, kx_2, kx_3]$$

en homogen løsning for alle skalarer k. Hvis $y = [y_1, y_2, y_3]$ er en annen homogen løsning, da er summen

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$$

også en homogen løsning.

3 Radopersjoner

Vi skal se på en effektiv måte å bestemme løsningene til et lineært likingssystem.

Skalere vi en likning med en skalar ulik 0 endrer vi ikke løsningsmengden til likningen. Bytter om på rekkefølgen av likningene eller legger en likning til en annen likning i et likningsystem så endrer vi heller ikke på løsningsmengden til likningssystemet.

Oppgave 4 *Vis påstandene ovenfor.*

De følgende tre operasjonene på matriser kalles **radoperasjoner**.

1. Bytte om to rader
2. Gange en rad med en skalar ulik 0
3. Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad

Løsningsmengden til en utvida matrise (tilordna et likningssystem) forblir uendra om vi utfører radoperasjoner på denne matrisen. To matriser kalles **radekvivalente matriser** (eller bare ekvivalente) hvis vi kan starte med den ene matrisen og utføre radoperasjoner til vi får den andre matrisen. Symbolet tilde $\sim$ brukes for å angi at to matriser er radekvivalente.

Oppgave 5 *Vis at hvis vi kan utføre radoperasjoner på en matrise* **A** *og få en matrise* **B***, da kan vi utføre radoperasjoner på matrisen* **B** *slik at vi får matrisen* **A***.*

La oss starter med et likningsystem som er så enkelt at det faktisk bare oppgir hva løsningen skal være. Ved å utføre radoperasjoner kan vi da lage et likningssystem med de samme løsningene, men hvor det ikke er opplagt hva løsningene er ved bare å se på likningene. For eksempel har følgende to likningssystem

$$\begin{array}{cccrr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

og

$$\begin{array}{cccrr} 2x & +3y & +5z & = & 25 \\ 2x & +9y & -10z & = & -8 \\ & -6y & +5z & = & 3 \end{array}$$

samme løsning. Det siste likingssystemet fremkommer fra det første ved bruk av radoperasjoner.

En taktikk for å løse et likningsystem, hvor de ulike variablene er "mikset sammen" og forekommer i flere likninger, er å benytte radoperasjoner til å "nøste opp liknigene" til vi får en beskrivelse hvor vi lett kan lese av løsningene.

Vi viser detaljert hvordan dette kan gjøres med eksempelet ovenfor. Den utvida koeffisientmatrisen til likningssystemet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 2 & 9 & -10 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Legger vi til -1 ganget med første rad til rad 2 får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Tar vi nå rad 2 og legger til rad 3 får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right]$$

Dette er eksempel på en matrise på **trappeform**. Vi kan nå løse likningssystemet som følger: Den tredje raden gir at $z = 3$. Den andre raden, hvor vi setter inn verdien for z, gir at $6y = -33 + 15z = -33 + 45 = 12$. Derfor er $y = 2$. Den første raden gir $2x = 25 - 3y - 5z = 25 - 6 - 15 = 4$. Derfor er $x = 2$.

Vi kan også utføre flere radoperasjoner slik at vi får den utvida matrisen på en enda enklere form. Vi kan da lese av løsnigene mer direkte. Ganger vi rad 3 med $-1/10$ og rad to med $1/3$ får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vi legger nå til 5 kopier av rad 3 til rad 2. Til rad 1 legger vi til rad 3 ganget med -5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vi ganger nå rad 2 med $1/2$ og deretter legger vi til -3 ganget med rad 2 til rad 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Til sist ganger vi rad 1 med $1/2$ og vi får den opprinnelige matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

som angir verdiene til de tre variablene. Dette er eksempel på en matrise på **redusert trappeform**.

Her er et eksempel hvor det er uendelig mange løsninger (en linje). La de tre variablene være x, y og z (i denne rekkefølgen) og la likningsystemet være gitt ved følgende utvida matrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \tag{3}$$

Likningsystemet har uendelig mange løsninger. For hver verdi av z så får vi akkurat en verdi for x og for y. Vi kan parametrisere løsningene (løsningsmengden) ved variabelen z som følger. Løsningene består av alle punkt (x, y, z) slik at $x = -3 + 4z$, $y = 1 - 2z$ for alle mulige verdier av variablene z. Vi kunne, i dette tilfellet, alternativt ha parametrisert ved en av de andre variablene, eller ved en annen parameter som ikke er en av variablene.

Oppgave 6 *a) Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen* x

b) Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen y

c) Vis at

$$(1 - 4a, 2a - 1, 1 - a)$$

for alle a *er en parametrisering av alle løsningene til likningen.*

Oppgave 7 *Lag en likning i to variabler slik at løsningsmengden kan parametriseres ved hjelp av* x *men ikke ved hjelp av variabelen* y.

I likningssystemet 3 var likningene "løst opp" slik at det var enkelt å lese av løsningene. Følgende likningssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

er radekvivalent til likningssystemet 3 og har derfor samme løsningsmengde. Men det er en mer "sammenblandet" versjon hvor det ikke er like lett å se direkte fra likningssystemet hva løsningsmengden er.

Vi utfører radoperasjoner for i størs mulig grad "løse opp" likningssystemet. Først tar vi å bytter de to radene og deretter tar vi -2 ganger det som nå er første rad og legger til andre rad

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Dette er en matrise på trappeform. Vi kan nå, for eksempel, bruke likning 2 til å uttrykke y ved hjelp av z. Deretter kan vi sette inn for y i likning 1 og uttrykke x ved hjelp av z.

Vi kan forenkle likningssystemet mer. Vi kan gjøre dette ved legge til 2 ganger rad 2 til rad 1. Vi ganger deretter rad 2 med -1 for å få koeffisienten til y til å bli 1. Resultatet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Dette er en matrise på redusert trappeform. Matrisen er den vi startet med i dette eksempelet.

En matrise $\mathbf{A}$ er på **trappeform** hvis den har egenskapen at alle rader bestående av nullelementer er neders i matrisen og posisjonen til det første ikke-null elementet i radene (som ikke bare består av null-elementer) er en ekte økende funksjon på radenummeret. De første ikke-null elementet i radene kalles de **ledende** elementene. En matrise er på **redusert trappeform** hvis den er på trappeform og alle ledende elementer er lik 1 samt at de ledende elementene er de eneste elementene ulik 0 i sine kolonner.

Samlingen av 0-er til venstre i en matrise på trappeform ser ut som en trapp som går oppover mot venstre. Derav navnet trappeform. Steghøyden er lik, men inntrinnet kan ha ulik lengde. Det kan også være et platå av rader med 0-elementer nederst.

Oppgave 8 *Er det sant at alle matriser* $\mathbf{A}$ *er på trappeform hvis følgende egenskap er sann: For alle elementer* $a_{i,j}$ *som er det elementet lengst til venstre i sin rad ulik 0, så er* $a_{k,l} = 0$ *for* $k > i$ *og* $l \leq j$*?*

Prosdyren vi har vist i de to eksemplene ovenfor kan utføres på alle matriser. Alle matriser er ekvivalent til en matrise på trappeform (bytt rader slik at ingen andre rader har elementer ulik 0 lengre til venstre for det første elementet ulik 0 i første rad. Arbeid deg rekursivt nedover radene). Videre fra en trappeform kan vi finne en ekvivalent matrise på redusert trappeform (arbeid deg oppover radene). Det finnes bare en matrise på redusert trappeform som er ekvivalent til en gitt matrise. Vi sier at den er **entydig** bestemt av matrisen.

Entydighet av redusert trappeform kan vi se som følger. Alle variabler x_i som svarer til kolonne i, hvor det ikke er et ledende element, er frie. De kan ta alle mulige verdier. Alle variabler x_i som svarer til kolonne i, hvor det er et ledende element, er bestemt av den siste kolonnen samt av frie variabler x_j for $j > i$. Det er ingen bidrag fra de "ufrie x_j" for $j > i$. Det er derfor akkuratt én må te å beskrive den lineære kombinasjonen av frie variabler som gir x_i. Det er derfor bare é n matrise på redusert trappeform som

Prosedyren som leder frem til en matrise på trappeform kalles **Gauss eliminasjon**. Hvis vi utfører radoperasjoner helt til vi får matrisen på redusert trappeform kalles prosedyren **Gauss-Jordan eliminasjon**.

Oppgave 9 *Skriv opp de utvida matrisene til de to likningssystemene nedenfor. Benytt Gauss-eliminasjon og finn de ekvivalente matrisene på redusert trappeform. Benytt dem til å beskrive alle løsningene (hvis det er løsninger).*

$$\begin{array}{rrcr} 2x & -3y & = & 4 \\ 6x & -7y & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & -z & = & 0 \\ 6x & -7y & +z & = & 1 \end{array}$$

Oppgave 10 (Krevende) *Lag overslag på maksimalt antall multiplikasjonsoperasjoner (av elementer) som behøvs for å utføre de Gauss-eliminasjon fra en generell $m \times n$-matrise til en ekvivalent matrise på trappeform, og deretter fra en matrise på trappeform til en matrise på redusert trappeform.*

Hint: Det kan være nyttig å benytte følgende

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

REDIGERES

Vi sier at radvektorene i en matriser er **lineært uavhengige** hvis matrisen er ekvivalent til en matriser på redusert trappeform uten rader med bare 0-elementer. Hver rad med bare null-elementer svarer til en rad som kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

En $m \times n$-matrise må ha minst $m - n$ rader med bare null-elementer når $m > n$. Derfor kan ikke radvektorenen være lineært uavhengige. Minst $m - n$ av dem kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

Hvordan lese av løsninger når llikningssytemet er på (redusert) trappeform. Frie parametre...

Antall variabler

Antall rader ulik 0 rader. Noen 0null rader som skal være ulik null?

4 Eksempler på lineære likningssystem

Vi skal benytte system av linære likninger til å beskrive alle polynomer p av grad 4 eller lavere med følggende fire egenskaper:

Punktene $(0,0)$ og $(1,1)$ ligger på grafen til p og den deriverte i $(1,1)$ er lik null samt at den dobbelderiverte til p i origo er lik null.

$$p(0) = 0 \qquad p(1) = 1 \qquad p'(1) = 0 \qquad p''(0) = 0$$

Et generelt polynom av grad 4 eller lavere er på formen

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

for fem koeffisienter a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5. Deriverer vi dette polynomet får vi

$$p'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$$p''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$$

De fire kravene til p er derfor følgende fire lineære likninger i koeffisientene

$$a_0 = 0$$

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1$$

$$a_2 = 0$$

$$4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$$

Vi har to likninger i de tre variablene a_1, a_3, a_4. Vi velger den ledenede koeffisienten til polynomet a_4 som fri parameter. Vi benytter rekkefølgen a_1, a_3, a_4 på variablene. Den utvida matrisern er da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Vi utfører radoperasjoner og får den ekvivalente matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Derfor er $a_1 = 3/2 + a_4/2$ og $a_3 = -1/2 - 3a_4/2$
Polynomene er derfor

$$p(x) = ax^4 - \frac{(1+3a)}{2}x^3 + \frac{(3+a)}{2}x$$

for reelle tall a.

Vi har vendepunkt i origo bortsett fra når $a = -1/3$. Vi har toppunkt i $(1, 1)$ bortsett fra når $a = 1$.

5 Matrisealgebra

To matriser med samme dimensjon kan legges sammen ved at vi adderer dem sammen elementvis. Vi kan også skalarmultiplisere dem ved å utføre skalarmultiplikasjonen elementvis. I det spesielle tilfellet av kolonne- og rad-vektorer får vi addisjon og skalarmultiplikasjon av vektorer.

$$-4\left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -4 & 12 & 0 \end{array}\right] \quad \text{og} \quad 7\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 12 & -5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -7 \\ 84 & -35 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 7 & -9 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 4 \\ 12 & -6 & -4 \end{array}\right]$$

Addisjon av matriser av samme dimensjon er kommutativ. Det vil sa at $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ for alle matriser $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ med samme dimensjon. **Nullmatrisen $\mathbf{0}$** av dimensjon $m \times n$ er matrisen med denne dimensjon hvor alle elementene er lik 0. (Vi spesifiserer ofte ikke dimensjonen.) Addisjon med nullmatrisen av samme dimensjon som $\mathbf{A}$ endrer ikke $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

For en matrise $\mathbf{A}$ vil $-1\mathbf{A}$ være matrisen hvor fortegnet til hver av elementene er snudd. Summen av denne matrisen og $\mathbf{A}$ er lik nullmatrisen.

Multiplikasjon av matriser er definert slik at koeffisientmatrisen multiplisert fra høyre med søylevektoren bestående av variablene, gir søylevektoren hvor elementene er de lineære uttrykkene. For eksempel

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y \end{bmatrix}$$

Er det flere søyler i matrisen til høyre i et produktet utføres multiplikasjonen som ovenfor for hver av søyelene i matrisen til høyre.

Matriseprodukt er bare definert mellom en $m \times k$ og en $k \times n$-matrise (ganget fra høyre). Resultatet er da en $m \times n$-matrise og element i, j er definert som skalarproduktet av i-te radvektor i den første matrisen med j-te kolonnevektoren i den andre matrisen (lengst til høyre). Her er noen eksempler hvor vi ser på produktene AB og BA for to matriser A og B

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [10]$$

Det kan og være at AB er definert men at BA ikke er definert. For eksempel er

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 5 & -2 \\ -7 & -5 & 8 & -6 \\ -5 & 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

mens produktet med faktorene byttet om ikke er definert.

Typisk er produktene AB og BA forskjellige for to matriser A og B. Vi sier gjerne at multiplikasjon av matriser er ikke kommutativt. Produkt av to matriser forskjellig fra null-matrisen kan godt bli lik null-matrisen. Dette er til forskjell for reelle tall hvor produktet av to tall ulik 0 alltid er ulik 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 11 *Regn ut produktene*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \textit{og} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 12 *Regn ut produktet*

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 13 *Vis at resultatet av å utføre radoperasjoner på et produkt av to matriser $A \cdot B$ er det samme som om vi først utfører radoperasjonene på A og deretter ganget med B fra høyre.*

Oppgave 14 *Hvor mange multiplikasjoner og hvor mange addisjoner må utføres ved å gange en $m \times k$ med en $k \times n$-matrise fra høyre?*

Produktet av (kompatible) matriser er assosiativt det vil si at $(A \cdot B) \cdot C$ er lik $A \cdot (B \cdot C)$. Multiplikasjonen er distributiv over addisjonen (vi kan gange ut parenteser). Dette er kanskje lettest å se ved å observere at produktet av $m \times n$-matrisen $M = \{m_{i,j}\}$ med $n \times k$-matrisen $N = \{n_{j,p}\}$ er matrisen MN hvor element i, p er summen over $m_{i,j} n_{j,p}$ fra $j = 1$ til $j = n$.

Vi kan med fordel tenke på matrisemultiplikasjon **AB** som at hver av kolonnene til matrisen **B**, til venstre, gir en lineær kombinasjon av kolonnevektorene i A.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots & \overrightarrow{v_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} \end{bmatrix}$$

La oss nå betrakte kolonnevektorer av lengde n. Vektoren $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon i, som er lik 1. En vilkårlig kolonnevektor kan entydig uttrykkes som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Vi kaller vektorene $\mathbf{e}_i$ standart basisvektorer.

(Kvadratiske matriser) Potenser algebra av slike idempotent nilpotent

En **kvadratisk matrise** er en matrise med like mange rader som kolonner. Alternativt snakker vi om en $n \times n$-matrise (for en spesifikk n eller bare med en ubestemt n for å angi at matrisen er kvadratisk.) Elementene i posisjon (i, i) til en kvadratisk matrise kalles for **diagonalelementene** til matrisen. **Identitetsmatrisen** $\mathbf{1}_n$ av dimensjon n er den kvadratiske matrisen av dimensjon $n \times n$ slik at alle de diagonale elementene er lik 1 og alle andre elementer er lik 0.

$$\mathbf{1_1} = [1] \quad \mathbf{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 15 *Matrisene $\mathbf{1_n}$ er på redusert trappeform. En $n \times n$-matrise har lineært uavhengige radvektorer presis når matrisen er ekvivalent til $\mathbf{1_n}$.*

Hvis $\mathbf{A}$ er en $m \times n$-matrise, da er

$$\mathbf{1_m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{og} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{1_n} = \mathbf{A}$$

Samlingen $n \times n$-matriser er en algebra. Vi kan kalle den for M_n. Hvis $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrise kan vi gange den med seg selv så mange ganger vi ønsker. Potensen $\mathbf{A}^n$ er produktet av $\mathbf{A}$ med seg selv n ganger, for naturlige tall n. En kvadratisk matrise er **idempotent** hvis $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. En kvadratisk matrise $\mathbf{A}$ er nilpotent hvis det finnes et naturlig tall n slik at $\mathbf{A}^n = 0$.

Oppgave 16 *En* 1×1*-matrise er på formen* $[a]$ *for en skalar* a*. Matrise addisjon og multiplikasjon er som for skalarer. Identitetsmatrisen er* $[1]$ *og nullmatrisen* $[0]$*. Det er derfor naturlig å identifisere* 1×1*-matrisene med skalarene.*

Vær klar over at noen regneprogram tar dette så langt at de definerer multiplikasjon av 1×1*-matriser med vilkårlige matriser som skalarmultiplikasjon av matriser. Strengt tatt er matriseprodukt med* 1×1*-matriser fra høyre bare definert for radvektorer (*$1 \times n$*-matriser), og matriseprodukt med* 1×1*-matriser fra venstre bare definert for kolonnevektorer (*$n \times 1$*-matriser). I begge tilfellene samsvarer matrisemultiplikasjonen med en* 1×1*-matrise med skalarmultiplikasjon med den tilsvarende skalaren.*

6 Matriser og komplekse tall

Hermite konjugerte er det samme som både transponert og kompleks konjugert.

7 Inversmatriser

(Kvadratiske matriser) Potenser algebra av slike idempotent nilpotent

En **kvadratisk matrise** er en matrise med like mange rader som kolonner. Alternativt snakker vi om en $n \times n$-matrise, uten å spesifisere hva n skal være. Elementene i posisjon (i, i) i en kvadratisk matrise, for ulike verdier av i, kalles for **diagonalelementene** til matrisen. **Identitetsmatrisen** $\mathbf{1}_n$ av dimensjon n er den kvadratiske matrisen av dimensjon $n \times n$ slik at alle de diagonale elementene er lik 1 og alle andre elementer er lik 0.

$$\mathbf{1_1} = [1] \quad \mathbf{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisene $\mathbf{1_n}$ er på redusert trappeform. En $n \times n$-matrise har lineært uavhengige radvektorer presis når matrisen er ekvivalent til $\mathbf{1_n}$.

Anta at $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrise av lineært uavhengige radvektorer. Dette er ekvivalen til at $\mathbf{A}$ på redusert trappeform er lik identitetsmatrisen.

Vi vet da at en hver vektor $\mathbf{b}$ så har likningen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

har akkurat én løsning for $\mathbf{x}$. Løsningen $\mathbf{x}$ er en lineær funksjon i $\mathbf{b}$. Vi viser hvorfor. La $\mathbf{x}_i$ være løsningen til $\mathbf{b}_i$ for $i = 1, 2$. Siden

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

og

$$\mathbf{A}(k\mathbf{x}_1) = k\mathbf{b}_1$$

så er løsningene $\mathbf{x}$ en lineær funksjon av $\mathbf{b}$.

Hvis $\mathbf{A}$ er en $m \times n$-matrise, da er

$$\mathbf{1_m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{og} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{1_n} = \mathbf{A}$$

En $n \times n$-matrise $\mathbf{A}$ er **invertibel** hvis det finnes en matrise $\mathbf{B}$ slik at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{1}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}_n$$

Hvis det finnes en matrise $\mathbf{B}$ med disse egenskapene er den bestemt av $\mathbf{A}$. Vi kaller denne matrisen **inversmatrisen** til $\mathbf{A}$ og skriver den som $\mathbf{A}^{-1}$.

En grunn til at inversmatriser er viktige er at de i tilfeller hvor det er entydig løsninger av et likningssytem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er matrisen som gir $\mathbf{x}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{b}$. Hvis vi har likningsystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{A}$ er inverterbar, da er løsningen gitt ved

$$\mathbf{x} = \mathbf{1}_n\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Dette er spesielt nyttig hvis noen av koeffisientene i $\mathbf{b}$ er parametre som vi ønsker å kunne justere.

Hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er to inverterbare kvadratisk matriser av samme dimensjon, da er produktet $\mathbf{AB}$ også en inverterbar matrise og inversmatrisen er gitt ved

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Oppgave 17 *Vis dette*

Vi kan finne inversmatrisen til en 2×2-matrise eksplisit. La

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La oss forsøke å finne en matrise $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{bmatrix}$. Anta $ad - bc \neq 0$. Siden $\mathbf{AB} = \mathbf{1}_2$ må $\mathbf{v}$ være vinkelrett på $[c, d]$ og ha skalarprodukt med $[a, b]$ lik 1. Derfor må $\mathbf{v}$ være lik

$$\mathbf{v} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$$

Tilsvarende må

$$\mathbf{u} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

Hvis $ad - bc$ er ulik null er derfor inversmatrisen

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Hvis $ad - bc = 0$, da finnes det ikke noen inversmatrise, fordi de to radvektorene i **A** er da parallelle.

Vi beskriver nå en effektiv metode for å avgjøre om inversmatirser finnes samt bestemme dem hvis de finnes. Anta at **A** er en kvadratisk matrise ekvivalent til identitetsmatrisen. Utfører vi de samme radoperasjoner på begge sider av likheten

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = \mathbf{1}_n\mathbf{b}$$

helt til **A** gjøres om til $\mathbf{1}_n$ får vi $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$ hvor **B** er resultatet av å utføre radoperasjonene på $\mathbf{1}_n$. Vi får derfor $\mathbf{A}x = \mathbf{A}Bb = \mathbf{b}$ for alle mulige **b**. Spesielt er dette sant for basisvektorene $\mathbf{e_i}$ fra $i = 1$ til $i = n$. Derfor får vi likheten $\mathbf{A}B = \mathbf{1}_n$. Tilsvarende er $BA = \mathbf{1}_n$. Matrisen **B** er derfor inversmatrisen til **A**. En fremgangsmåte for å finne inversmatrisen til en kvadratisk matrise **A** (hvis det er mulig) er derfor som følger: Sett opp en $n \times 2n$ matrise ved å sette sammen **A** og identitetsmatrisen $\mathbf{1}_n$ som $[A|\mathbf{1}_n]$. Utfør radoperasjoner for å føre **A** over til redusert trappeform. Hvis **A** har lineært uavhengige radvektorerer ender vi da opp med $\mathbf{1}_n$ i stede for **A**. Resultatet av radoperasjonene på $\mathbf{1}_n$ er inversmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$. Vi ender altså opp med $[\mathbf{1}_n|A^{-1}]$. Hvis den reduserte trappeformen ikke er identitetsmatrisen så er ikke **A** inverterbar. (Hvorfor)

Oppgave 18 *Utfør prosedyren ovenfor på en generell* 2×2*-matrise* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*. Det vil selvsagt lede til inversmatrisen vi fant ovenfor.*

Oppgave 19 *Undersøk om matrisene*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -15 \\ 8 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

har inversmatriser og finn inversmatrisene om de eksisterer.

Vis at den utvida konjugatsetningen gir

$$(\mathbf{1_n} - \mathbf{X})(\mathbf{1_n} + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3 + \cdots + \mathbf{X}^k) = \mathbf{1_n} - \mathbf{X}^{k+1}$$

for alle matriser X. Dette gir oss en metode for å finne tilnærminger til inversmatriser. For eksempel hvis vi bare har små avvik fra identitetsmatrisen så kan den skrives som $\mathbf{1_n} - \mathbf{X}$ hvor $\mathbf{X}^k$ raskt blir liten når k øker. Hvis **X** er en nilpotent matrise slik at $\mathbf{X}^n = \mathbf{0}$ for en n, da er $(\mathbf{1_n} - \mathbf{X})^{-1}$ gitt eksakt ved å ta med n ledd i ekspansjonen.

8 Transponering av en matrise

Den **transponerte** til en $m \times n$-matrise **A** er $n \times m$-matrise $\mathbf{A}^T$ hvor element i, j i **A** er element j, i i $\mathbf{A}^T$. For eksempel

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -6 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 4 & -71 & 21 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 \\ -71 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Hvis vi transponerer en matrise to ganger får vi den opprinnelige matrisen tilbake igjen.

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

Den transponerte av en søylevektor er radvektoren med de samme elementene, og omvendt, den transponerte av en radvektor er en søylevektor. Vi kan og tenke på den transponerte av en matrise **A** som at radvektorene gjøres om til kolonnevektorer, eller omvendt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T & \cdots & \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}$$

En kvadratisk matrise kalles **symmetrisk** hvis den er lik sin egen transponerte. Dette er det samme som at elementet $a_{i,j}$ er lik elementet $a_{j,i}$ for alle i og j. Matrisen er **antisymmetrisk** (skjevsymmetrisk) hvis den er lik -1 ganger sin transponerte.

Oppgave 5 *Vis at*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

for alle matriser A og B slik at produktet AB er definert. Dette sier at den transponerte av et produkt av to matriser er lik produktet av de transponerte matrisene ganget sammen i motsatt rekkefølge.

Oppgave 20 *Likningssystemet $Ax = b$ er ekvivalent til $x^T A^T = b^T$. Fortolk dette.*

En kvadratisk matrise er **øvre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller ovenfor diagonalen til matrisen. En kvadratisk matrise er **nedre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller nedenfor diagonalen til matrisen. En matrise er derfor øvre triangulær hvis den transponerte til matrisa er nedre triangulær. En fellesbetegnelse er for de to typene matriser er **triangulær** matrise. En kvadratisk matrise på trappeform er alltid en øvre triangulær matrise. Hvis alle diagonalelementen til en $n \times n$-matrise på trappeform er forskjellig fra null så har matrisen på trappeform n ledende elementer.

Vi kaller en matrise **ekte triangulær** hvis den er triangulær og alle diagonalelementene er lik 0.

Produktet av to øvre triangulære matriser er igjen en øvre triangulær matrise.

Oppgave 21 *Vis at produktet av to øvre traingulære matriser er igjen en øvre triangulær matrise. Vis at produktet av en matrise* **A** *og en matrise* **B** *med egenskapene at $a_{i,j} = 0$ for $i > j - n_1$ og $b_{i,j} = 0$ for $i > j - n_2$ har egenskapen at elementene i posisjon i, j er null for $i > j - (n_1 + n_2)$.*

Spesielt vis at en kvadratisk matrise **A** *av dimensjon n slik at $a_{i,j} = 0$ for $j \leq i$ (ekte øvre triangulær) har egenskapen at $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.*

Oppgave 22 *La* **A** *være en vilkårlig øvre triangulær matrise. Matrisen er inverterbar presis når alle diagonalelementene er ulik 0. Vis at inversmatrisen til A er igjen en øvre triangulær matrise. Hva er diagonalelmentene til inversmatrisen uttrykt ved hjelp av diagonalelementene til matrisen A?*

Oppgave 23 *Vis at inversmatrisen til en inverterbar øvre triangulær matrise er igjen en øvre triangulær matrise. Vis at inversmatrisen til en inverterbar nedre triangulær matrise er igjen en nedre triangulær matrise.*

Oppgave 24 *Alle matriser er lik et produkt av en nedre og en øvre triangulær matrise. (opp til bytter av rader...) En faktorisering som et slikt produkt hvor den nedre triangulære matrisen er til venstre i produktet kalles en LU-faktorisering. Det kommer fra engelsk: "lower and upper traingular matrices".*

I hvilken grad er en slik faktorisering unik?

9 Minste kvadraters metode

Gitt to forskjellige punkter, så er det akkurat en linje som går gjenom dem. Hvis punktene er rett ovenfor hverandre (samme x-koordiant), da er linjen den vertikale linjen gjennom punktene. Ellers så finnes det akkurat to parametre a og b slik at linjen gitt ved $y = ax + b$ går gjennom punktene.

Hvis vi har mer enn to punkter i planet så finnes det typisk ikke en linje som går gjennom alle puktene. I en del sammenhenger forventer vi en linjaær sammenheng mellom to størrelser og vi ønsker å estimere en slik sammenheng basert på data.

Anta (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... , (x_n, y_n) er n punkter i planet. Vi skal finne linjen $y = ax+b$ slik at summen av kvadratene til avstandene fra (x_i, y_i) til punktene (x_i, ax_i+b) på linjen er minst mulig.

Vi reformulerer problemstillingen ved hjelp av vektorer i et n-dimensjonalt rom.

La

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vi ønsker med andre ord å finne a og b slik at avstanden mellom vektorene $\mathbf{y}$ og $a\mathbf{x} + b\mathbf{c}$ er minst mulig. Denne avstanden er minst mulig når differansen mellom vektorene

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - (a\mathbf{x} + b\mathbf{c})$$

står vinkelrett på planet utspent av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{c}$. Derfor må koeffisientene a og b være slik at skalarproduktet mellom differansen $\mathbf{z}$ og både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{c}$ er lik 0.

Vi gir dette en kompakt beskrivelse. La

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}, \mathbf{c}]$$

Da har vi at

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - (a\mathbf{x} + b\mathbf{c}) = \mathbf{y} - M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Kravet at skalarproduktet mellom differansen $\mathbf{z}$ og både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{c}$ er lik 0 kan nå formuleres som

$$\mathbf{M}^T \left(\mathbf{y} - M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

Hvis 2×2-matrisen $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ er inverterbar gir dette

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{y}$$

Oppgave 25 *Vis matrisen $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ er inverterbar presis når det er minst to punkter og ikke alle punktene har sammen x-verdi. Hvis det er minst to punkter og de alle har samme x-verdi d så går den vertikale linjen $x = d$.*

Bevis: Determinanten til matrisen

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} |\mathbf{x}|^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & 1 \end{bmatrix}$$

er lik

$$n|\mathbf{x}|^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

Denne er lik 0 presis når alle x_i er like. Ellers er determinanten positiv.

GEOGEBRA

Det er lett å lage utvidinger av denne teknikken. Samme idee kan benyttes for å tilnærme polynomer av grad n til et sett av minst $n+1$ punkter.

Oppgave 26 *Gitt n punkt (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , . . . , (x_n, y_n) i planet. Anta $n \geq 3$. Bestem a, b og c slik at*

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

tilnærmer dataene best mulig i følgende forstand

$$\sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2$$

er et minimum. Når lar koeffisientene seg bestemme?

Oppgave 27 *Anta vi har gitt n punkter i $\mathbb{R}^m$. Bestem linjen i rommet som best tilnærmer punktene.*

10 Determinanter

Vi har sett at en kvadratisk matrise

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er inverterbar presis når skalaren $ad - bc$ er ulik null. Vi kaller denne skalaren **determinanten** til matrisen. Vi benytter følgende to skrivemåter for determinanten

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Oppgave 6 *Regn ut determinanten til matrisene*

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 10 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & b \\ a & d \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 *La*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Regn ut determinanten til produktet

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

I neste oppgave skal du studere egenskaper til denne skalaren tilordnet en 2×2-matrise. Egenskapene vi finner der motiverer en utviding av definisjonen av determinanten til en funksjon som tilordner en skalar til vilkårlige kvadratiske matriser.

Oppgave 8 *Sjekk at determinanten er lineær i hver av de to radene og i hver av de to søylene (respekterer sum og skalarmultiplikasjon). Sjekk at determinanten skifter fortegn hvis de to radene bytter plass eller hvis de to kolonnene bytter plass.*

Sjekk at determinanten er uendret under transponering og at determinanten til et produkt av to 2×2-matriser er produktet av determinanten til hvere av de to matrisene.

Vi skal nå se på funksjoner som tilordner en skalar til n vektorer hver av lengde n. Vi krever at funksjonen skal være lineær i hver vektor-variabel. Videre ser vi på funksjoner med egenskapen at bytter vi om to av vektorene så skal funksjonen skifte fortegn. Vi sier gjerne at funksjonen er lineær i hver vektorvariabel og at den er antisymmetrisk. Det viser seg at slike funksjoner er entydig bestemt opp til å gange dem med en konstant. Hvis vi krever at funksjonen på vektorene $e_1, \ldots, e_n$ (i denne rekkefølgen) skal gi verdien 1 så er det akkurat en funksjon med disse egenskapene. Vi ordner de n vektorene i en matrise. La oss kalle den for A. Om vektorene er søyle eller radvektorer spiller ingen rolle. Funksjonen blir den samme.

Denne funksjonen kalles **determinanten** til $n \times n$ matrisen. Vi skriver gjerne dette som $\det(A)$ eller av og til den mer slumsete notasjonen $|A|$. Sistnevnte bør ikke brukes sammen med absoluttverdien til determinanten.

Determinanten $\det(A)$ er ved linearitet lik summen hvor hver av variablene $i_1, \ldots i_n$ går fra 1 til n. (Dette er en sum med n^n ledd.)

$$a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} \det(e_{i_1} \ldots e_{i_n})$$

Vi får bare bidrag når alle $i_1, \ldots i_n$ er forskjellige fra hverandre. Har vi to like vektorer i determinanten så må den være lik sin egen additive invers, og derfor lik 0. Grunnen til det er at determinanten skifter fortegn hvis vi bytter de to vektorene, men siden vektorene er like forblir determinanten uendra under ombytte.

Oppgave 9 *Forklar hvorfor definisjonen ovenfor gir at for 1×1-matriser så er determinanten gitt ved*

$$\det([a]) = a$$

Oppgave 10 *Vis at en diagonal matrise har determinant lik produktet av alle diagonalelementene. Vis at en triangulær matrise har determinant lik produktet av diagonalelementene.*

Permutasjoner av n element er omstokkinger av de n elementene til en annen rekkefølge. La s være en slik omstokking og la $s(1), s(2), \ldots, s(n)$ være rekkefølgen som $1, 2, \ldots, n$ er byttet om til. For eksempel er permutasjonene av $1, 2$ identitetspermutasjonen (som ikke bytter noen tall) og permutasjonen $(2, 1)$ som bytter to tall. Permutasjonene til $1, 2, 3$ er

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

og

$$(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$$

De tre først er jevne permutasjoner (et jevn antall bytte av elementer fra det opprinnelige). De tre siste er odde permutasjoner (et odde antall bytte av elementer fra det opprinnelige oppsettet). Generelt er det $n!$ forskjellige permutasjoner av n elementer.

Vi trenger bare ta med ledd i summen for determinanten hvor $i_1, \ldots, i_n$ er forskjellige. Determinanten er derfor lik summen over

$$a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)} \det(e_{s(1)} \ldots e_{s(n)})$$

for alle permutasjoner s. Determinanten $\det(e_{s(1)} \ldots e_{s(n)})$ er 1 hvis permutasjonen er jevn og -1 hvis permutasjonen er odde. Vi skriver gjerne dette fortegnet som $(-1)^s$. Derfor er determinanten summen over de $n!$ leddene

$$(-1)^s a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)}$$

for alle permutasjoner s.

Samme argument med radvektorer i stede for søylevektorer gir akkurat samme funksjon (når rekkefølgen på vektorene opprettholdes: venstre mot høyre eller ovenfra og ned.) Å skifte vektorene fra rad til søyle vektorer svarer til å transponere matrisen med vektorene. (I begge tilfeller vil matrisene av standard basisvektorene være lik identitetsmatrisen.) Derfor har vi

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Oppgave 11 *Vis at determinanten til* 3×3*-matrisen er gitt som følger*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Utfører vi radoperasjoner på en matrise vil determinanten til matrisen endre seg som følger:

1. Legger vi en skalar ganget med en rad til en annen rad så endres ikke determinanten.

2. Ganger vi en rad med en skalar c så er determinanten til den nye matrisen c ganget med determinanten til den gamle

3. Bytter vi om to rader så skifter determinanten fortegn

Hvis en matrise er triangulær så er determinanten til matrisen lik produktet av diagonalelementene. En prosedyre for å finne determinanter er derfor å utføre radoperasjoner helt til matrisen overføres til en ekvivalent matrise på triangulær form. Determinanten til matrisen er da lik produktet av diagonalelementene til den ekvivalente matrisen på trappeform delt med produktet av alle skalarene som rader ble ganget med under radoperajonene samt snu fortegnet hvis et odde antall radbytter ble utført.

Dette viser følgende resultat:

En kvadratisk matrise A har en inversmatrise $\Leftrightarrow$ matrisen A på redusert trappeform er identitetsmatrisen $\Leftrightarrow$ determinanten til A er ulik null $\det(A) \neq 0$.

Determinanten til en matrise er 0 hvis de n radvektorene (eller ekvivalent søylevektorene) ikke er lineært uavhengige og ulik 0 hvis de er linært uavhengige.

Determinanten er til et produkt av to kvadratiske matriser er lik produktet av determinanten til hver av dem

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Vi sier gjene at determinanten respekterer multiplikasjon. Selv en direkte verfikasjon av dette for 2×2-matriser krever litt arbeid.

Vi skal nå forklare hvorfor det er slik. For en hver kvadratisk $n \times n$-matrise B så er $\det(AB)$ en funksjon som tar inn n radvektorer (i A) og gir ut en skalar. Funksjonen er lineær i hver av radvektorene samt antisymmetrisk. Den er derfor lik $\det(A)$ ganget med verdien til til funksjonen på identitetsmatrisen. Når A er identitetsmatrisen er funksjonen lik

$$\det(AB) = \det(\mathbf{1}_n B) = \det(B)$$

Derfor er $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Her er noen konsekvenser. Siden

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{1}_n) = 1$$

så $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = (\det(A))^{-1}$.

Gjentatt bruk av egenskapen at determinanter respekterer multiplikasjon gir

$$\det(A^n) = (\det(A))^n$$

for naturlige tall n.

Gitt en $n \times n$-matrise $\mathbf{A}$. Determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-matrisen hvor vi har fjernet rad i og kolonne j kalles (i, j)-minoren til A. Det er n^2 minorer til matrisen $\mathbf{A}$, en for hver posisjon til elementene. Denne determinanten er en multilinær funksjon som tar inn $n-1$ n-vektorer, er antisymmetrisk med hensyn til bytter av vektorer, sender vektoren $\mathbf{e_i}$ til 0.

Dette er resultatet av enten å erstatte rad i med vektoren $\mathbf{e_j}$ eller erstatte kolonne j med $\mathbf{e_i}$. Starter vi med en av disse tilfellene kan vi utføre rad eller søyle operasjoner slik at matrisen har både vektor $\mathbf{e_j}$ i rad i og vektoren $\mathbf{e_i}$ i søyle j. Ved å utføre $j-1$ bytter for å forflytte kolonnevektoren med $\mathbf{e_j}$ helt til venstre og deretter $i-1$ bytter av rader for å forflytte søyle i helt til tops får vi

Rekursiv beskrivelse av determinant.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{i,s} M_{i,s}$$

for $s = 1 \dots n$. Her er $M_{i,s}$ determinanten til den kvadratiske $(n-1)$-matrisen som fremkommer ved å utelate rad i og kolonne s. Tilsvarende kan determinanten regnes ut kolonnevis, fordi det svarer til å regne ut determinanten til den transponerte matrisen.

Oppgave 28 *Sjekk at den rekursive beskrivelsen av inversmatrisen ovenfor gir*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Den rekursive definisjonen av determinanter krever $n!$ multiplikasjonsoperasjoner. Metoden hvor vi utfører radoperasjoner krever omlag n^3 multiplikasjonsoperasjoner.

Her er en tabell over verdiene...

Oppgave 29 *Forsøk å beskrive determinanten til en sum av to $n \times n$-matriser* **A** *og* **B** *som en sum av 2^n determinanter til matriser som er laget ved å benytte noen rader fra A og noen rader fra B.*

11 Kramers regel

La A være en kvadratisk matrise hvor $\det(A) \neq 0$. Da er alle søylevektorene (og radvektorene) i matrisen lineært uavhengige. Det finnes da, for all vektorer b, en entydig løsningsvektor x av likningssystemet

$$Ax = b.$$

Denne løsningen x er en lineær funksjon i b. La $x_i(b)$ være det i-te elementet i x som en funksjon av b. Siden Ae_j er lik den j-te kolonnen K_j til A så er $x_i(K_j)$ lik 1 hvis $i = j$ og 0 ellers. Vi beskriver en lineær funksjon med disse egenskapene ved hjelp av determinanter. La $A_i(b)$ være determinanten til $n \times n$ matrisen vi får ved å erstatte kolonne i med kolonnevektoren b. Da har vi at $A_i(K_j)$ er lik $\det(A)$ hvis $i = j$ og null ellers (siden vi da får to identiske kolonner). Derfor får vi følgende resultat, som kalles **Kramers regel**,

$$x_i(b) = \frac{A_i(b)}{\det(A)}$$

Som en konsekvens av Kramer regel kan vi beskrive inversmatrisen til en kvadratisk matrise med determinant ulik 0 ved minorene og determinanten til matrisen.

Siden $AA^{-1} = \mathbf{1}_n = [e_1, \ldots, e_n]$ så er $j$te rad til A^{-1} løsningen til linkningssystemet

$$Ax = e_j$$

Fra Kramers regel er derfor elementet

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{A_i(e_j)}{\det(A)}$$

Determinanten $A_i(e_j)$ er lik determinanten til matrisen hvor i-te kolonne er erstattet av e_j og hvor j-te rad er lik e_i (benytt kolonneoperasjoner til å finne en matrise med samme determinant hvor hver av de andre ellementene i raden alle er lik 0). Vi kan forflytte rad j opptil første rad og deretter j-te kolonne frem til første kolonne. Dette krever $i+j-2$ radoperasjoner. Determinanten til matrisen som da fremkommer er lik (i,j)-minoren $M_{i,j}$ til matrisen. Siden vi har benyttet $i+j-2$ radoperasjoner er determinanten $A_i(e_j)$ lik $(-1)^{i+j}M_{j,i}$, som er cofaktoren $C_{j,i}$. Vi definerer den adjungerte $\mathrm{adj}(A)$ til A til å være den transponerte til cofaktormatrisen til A. Vi har da følgende beskrivelse av inversmatirser ved hjelp av determinanter

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$$

Vi har derfor at en kvadratisk matrise A har en inversmatrise hvis og bare hvis determinanten $\det(A)$ er ulik 0.

Denne eksplisitte formelen for inversmatrisen er ikke en effektiv måte å finne inversmatrisen til store matriser.

Oppgave 30 *Sjekk at beskrivelsen av inversmatrisen ovenfor gir*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Oppgave 31 *Beskriv inversmatrisen til en generelle* 3×3*-matrise*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

med determinant ulik 0. Selv i dette tilfellet blir formelen ganske komplisert. Det er med god grunn vi stort sett bare bruker en formel for inversmatrisen i tilfellet med 2×2*-matriser.*

Oppgave 32 *Vis at inversmatrisen til en inverterbar matrise med rasjonale elementer er igjen en matrise med rasjonale elementer. Vis videre at hvis* r *er en felles nevner for alle elementene i matrisen da er*

$$r^n \det(A)\, A^{-1}$$

en matrise hvor alle elementene er heltall.

Dette kan benyttes til å finne en ryddig beskrivelse av inversmatrisen til en kvadratisk matrise med heltallselement. Determinanten er et heltall. Det heltallet ganget med inversmatrisen er igjen en matrise med heltallselementer. Dette kan hjelpe deg til å gi en mer oversiktlig beskrivelse av inversmatrisen selv om du regner den ut med en maskin.

Oppgave 33 *Hva er determinanten til* $\mathrm{adj}(A)$*? Når er denne lik determinanten til* A*?*

12 Eksempler fra Kretslære

Ohm lov og Kirchoffs lover.

13 Lineære transformasjoner

Vi skal nå fortolke $m \times n$-matriser som en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. En $m \times n$-matrise $\mathbf{M}$ definerer en funksjoner ved å sende n-vektoren $\mathbf{x}$ til m-vektoren $\mathbf{Mx}$. Denne funksjonen har egenskapen at den respekterer både addisjon og skalarmultiplikasjon i de to vektorrommene.

$$\mathbf{M}c\mathbf{x} = c\mathbf{M}\mathbf{x} \qquad \mathbf{M}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = \mathbf{M}\mathbf{x_1} + \mathbf{M}\mathbf{x_2}$$

En funksjon mellom vektorrom med disse to egenskapene kalles en **lineær transformasjon**. Faktisk er alle lineære transformasjoner mellom (endeligdimensjonale) vektorrom (med en valgt basis, slik at vektorene kan beskrives med koordianter) gitt ved en matrise. Vi viser dette nå. Vi minner om at $\mathbf{e}_i$ er vektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon i, som er lik 1. En vektor i $\mathbb{R}^n$ er entydig uttrykt som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

La nå T være en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ som er lineær. Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

Vi lager nå en $m \times n$-matrise $\mathbf{T}$ ved å la rekke nummer i være lik $T(\mathbf{e_i})$. Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{Tx}$$

hvor produktet av $\mathbf{T}$ med $\mathbf{x}$ fra venstre er gitt ved matrisemultiplikasjon. Matrisen $\mathbf{T}$ kalles **standardmatrisen** til transformasjonen.

Vi kan nå se på noen eksempler. Refleksjon om x-aksen i planet $\mathbb{R}^2$ er en lineær transformasjon. Standardmatrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Slik er det fordi $\mathbf{e}_1$ er uendra mens $\mathbf{e}_2$ skifter fortegn under transformasjonen.

Rotasjon med en vinkel v i positiv retning i planet har standardmatrise

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}$$

Dette er slik fordi $\mathbf{e}_1$ sendes til $\cos(v)\mathbf{e}_1 + \sin(v)\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_2$ sendes til $\cos(v)\mathbf{e}_2 - \sin(v)\mathbf{e}_1$.

Oppgave 34 *Finn standardmatrisen til rotasjon i rommet* $\mathbb{R}^3$ *om* y *og* z *aksen (pass på at du roterer i positiv retning).*

Oppgave 35 *Regn ut begge produktene av rotasjon* 90 *grader om* x*-aksen og rotasjon* 90 *grader om* z*-aksen. Sjekk at resultatene faktisk stemmer med det du får ved å rotere et aksesystem* 90 *grader først om den ene og så om den andre aksen.*

En **projeksjon** er en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til seg selv med egenskapen at $P^2 = P$. Et element som er lik sitt eget kvadrat kalles et **idempotent** element.

Oppgave 36 *Vis at projeksjonen i planet ned til linjen gjennom origo med retningsvektor* $[a, b] \neq \mathbf{0}$ *er gitt ved*

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$$

Sjekk at kvadratet av denne matrisen faktisk er lik seg selv.

Oppgave 37 *Avgjør om følgende avbildninger fra planet til seg selv er lineære eller ikke. Hvis transformasjonene er lineære finn standardmatrisen for transformasjonen.*

1. *Projeksjonen til linjen som går gjennom punktet* $(1, 0)$ *og som er parallelle til vektoren* $[1, 1]$
2. *Projeksjonen til linjen som går gjennom punktet* $(4, -12)$ *og som er parallell til linjen* $[-1, 3]$.
3. *avbildningen som sender* (x, y) *til* $(xy, 0)$
4. *funksjonen som sender* (x, y) *til* $(\sqrt{x^2}, 0)$
5. *Avbildingen vi får ved å bytte om x- og y-koordinaten.*

Vi beskriver nå projektsjonen ned til et plan gjennom origo i rommet. Anta at planet er utspent av to vektorer $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$. Alle vektorer fra origo til et vilkårlig punkt på planet er da på formen $c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2}$ for skalarer c_1 og c_2. For å gjøre beskrivelsen av projeksjonen mer oversiktlig vil vi videre anta at begge vektorene har lengde 1 og at der er ortogonale (står vinkelrett på hverandre). Vi kan alltid sørge for det ved å ta komponenten $\mathbf{u_2} - \mathbf{u_2} \bullet \mathbf{u_1}/|\mathbf{u_1}|$ til $\mathbf{u_2}$ som er vinkelrett på $\mathbf{u_1}$, og til sist normalisere disse to ortogonale vektorene.

Vi lager en 3×2-matrise av disse to vektorene

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$$

Da har vi at

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{1_2}$$

Vi undersøker hva projeksjonen gjør med hver av basisvektorene $\mathbf{e_i}$. Projeksjonen ned i planet er

$$(\mathbf{u_1} \bullet \mathbf{e_i})\mathbf{u_1} + (\mathbf{u_2} \bullet \mathbf{e_i})\mathbf{u_2}$$

fra våre antakelser om vektorene $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$. Standardmatrisen til projeksjonen er derfor

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_1}^T \\ \mathbf{u_2}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

Legg merke til at

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

Oppgave 38 *Vi betrakter følgende plan gjennom origo utspent av de ortonormale vektorene*

$$\mathbf{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1, 0] \qquad \mathbf{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$$

Vis at standardmatrisa til projeksjonen til planet er gitt ved

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Sjekk gjerne at matrisen er idempotent og at den bevarer vektorene $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$ mens en normalvektor til planet slik som $[1, 1, -2]$ sendes til $\mathbf{0}$.)

En løsning til likninsystemnet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kalles en **partikulær løsning**. En løsning til likninsystemnet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ kalles en **homogen løsning**.

Oppgave 39 *Vis at samlingen av homogene løsninger til et likningssystem har egenskapen at det er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Vis med eksempel hvordan dette feiler for løsninger til et likninssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.*

Oppgave 40 *Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ begge er løsninger til linkningsystemet da er differanse $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ en løsning til det homogene likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.*

Vis at alle løsninger til likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ består av summen av en fast partikulær løsning pluss alle mulige homogene løsninger til likningen.

Oppgave 41 *La nå T være en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ som er lineær. La A være en $n \times k$-matrise, og la $\mathbf{v}$ være en k-kolonnevektor. Vis følgende*

$$T(A\mathbf{V}) = T(A)\mathbf{v}$$

Her betyr $T(A)$ at transformasjonen T utføres på hver av kolonnevektorene.

14 Rang til en matrise

Nullrommet til en matrise $\mathbf{M}$ er alle vektorene som avbilder til null-vektoren under den lineære transformasjonen som matrisen definerer. **Kolonnerommet** til en matrise er alle vektorer som er i bilde av transformasjonen. Det er underrommet bestående av alle vektorer som er på formen $\mathbf{Mx}$ for en vektor $\mathbf{x}$. Kolonnerommet er altså underrommet utspent av kolonnevektorene i M. Dimensjonen til kolonnerommet kalles **rangen**

til matrisen. Rangen til en matrise $\mathbf{A}$ skrives rang($\mathbf{A}$). **Raderommet** til en matrise er alle vektorer som er en kombinasjon av radene i matrisen. Raderommet til $\mathbf{M}$ er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen $\mathbf{M}^T$.

Hvis to matriser er (rad)-ekvivalente så er både nullrommet og raderommet også ekvivalente. Kolonnerommene vil ikkje være ekvivalente, men dimensjonen til kolonnerommene vil være like. Dette kan vi se som følger: Hvis kolonnevektorene nummer $i_1, \ldots, i_k$ i matrisen $\mathbf{A}$ er lineært uavhengige, da er også kolonnevektorene nummer $i_1, \ldots, i_k$ lineært uavhengige i alle ekvivalente matriser. Derfor er dimensjonen til to ekvivalente matrise størren enn eller lik hverandre, og derfor like.

Vi viser nå hvordan vi kan finne nullrommet og raderommet fra den ekvivalente matrisen på redusert trappeform. Raderommet har basis radvektorene i matrisen på redusert trappeform. For hver i, slik at det ikke er et ledende element i kolonne i, finner vi en vektor i nullrommet med elementet i posisjon i lik 1 og alle elmenter i posisjon k, for $k < i$, lik 0. Det er mulig å finne slike vektorer fra konstruksjonen av en matrise på trappeform. Disse vektorene er alle i nullrommet og de er lineært uavhengige. Vi kan ikke ha vektorer i null-rommet som har elementet lengst til høyre ulik null i en søyle hvor det er et ledende element. Null-rommet er derfor generert av disse vektorene vi har konstruert. Dimensjonen til null-rommet er derfor lik antall kolonner til matrisen $\mathbf{M}$ minus dimensjonen til raderommet.

Samlingen av kolonnevektorene til matrisen $\mathbf{M}$ i posisjonene hvor det er et ledende element, etter at matrisen er gjort om til trappeform, er lineært uavhengige vektorer. Legger vi til en annen kolonnevektor er systemet lineært avhengig (siden det er opplagt tilfelle for den trappereduserte matrisen). Derfor utgjør disse vektorene en basis for kolonnerommet.

Vi konkluderer med at rangen rang($\mathbf{M}$) til en matrise $\mathbf{M}$ er lik antall ledende elementer til matrisen på trappeform, som er lik både dimensjonen til raderommet og til kolonnerommet. Summen av rangen og dimensjonen til nullrommet er lik antall kolonner i matrisen.

Oppgave 42 *Vis at en $m \times n$-matrise har et null-rom som har dimensjon minst $n - m$. Vis at en $m \times n$-matrise har rang mindre enn eller lik både m og n.*