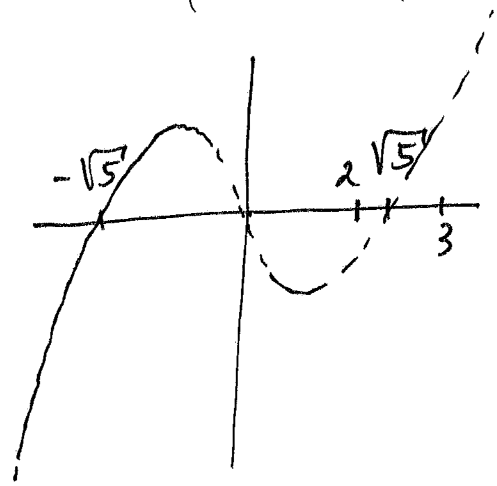
Eksempel Halveingsmetoden

Finn nullpunkt til $f(x) = x^3 - 5x$

$f(x) = x(x^2-5) = x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

1



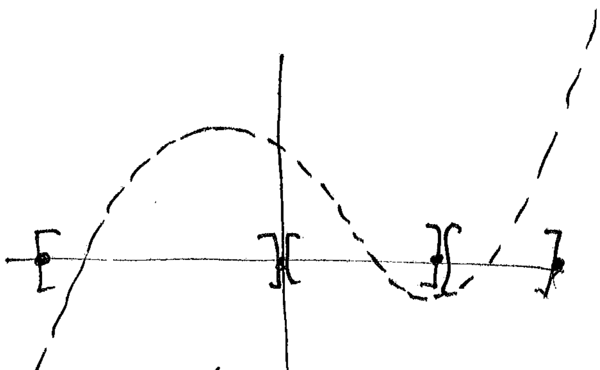
$f(2) = 8 - 10 = -2$

$f(3) = 27 - 15 = 12$

skjæringssetningen gir at det er minst ett nullpunkt på $[2,3]$. Det er ett nullpunkt fordi $f(x)$ er voksende på $[2,3]$ (siden $f'(x) > 0$)

Likningen $f(x) = -1$ svarer til:

$f(x) + 1 = 0$: $x^3 - 5x + 1 = 0$



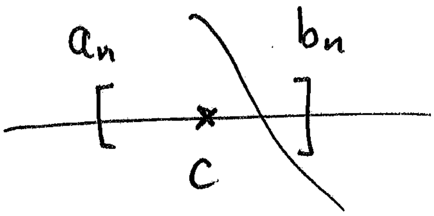
Det er ikkje flere nullpunkt fordi x^3-5x+1 er et tredjegrads-polynom.

Halveingsmetoda 3 ganger.

Nøyaktigheten til halveringsmetoden.

2 starter med bredde $b-a$ $\quad ([a,b])$

Halveringsmetoden n ganger:
intervall med bredde $\frac{b-a}{2^n}$.



$c = \frac{a_n+b_n}{2}$ har avstand til nullpunktet (punktene i $[a_n, b_n]$) som er mindre enn eller lik:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)}{2^n}$$

$$2^{10} = 1024 > 10^3$$

$$2^{10} \cdot 2^{10} = (2^{10})^2 = 2^{20} = (1024)^2 = 1\,048\,576 \sim 10^6$$

$$2^{40} \sim 10^{12}$$

Maksimums punkt

(3) f, D_f

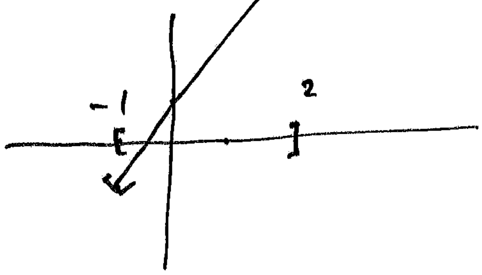
Et maksimumspunkt til f er en $c \in D_f$ slik at $f(x) \le f(c)$

Verdien $f(c)$ kalles maksimumsverdien til f.

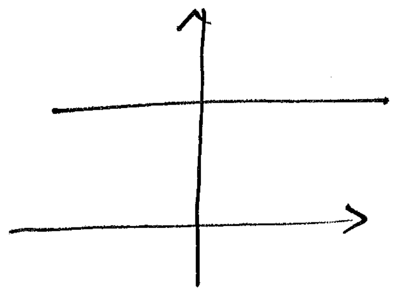
Tilsvarende for minimumspunkt

Fellesbetegnelse : ekstremalpunkt (verdier)

Eksempel $f(x) = 2x + 1$ $D_f = [-1, 2]$

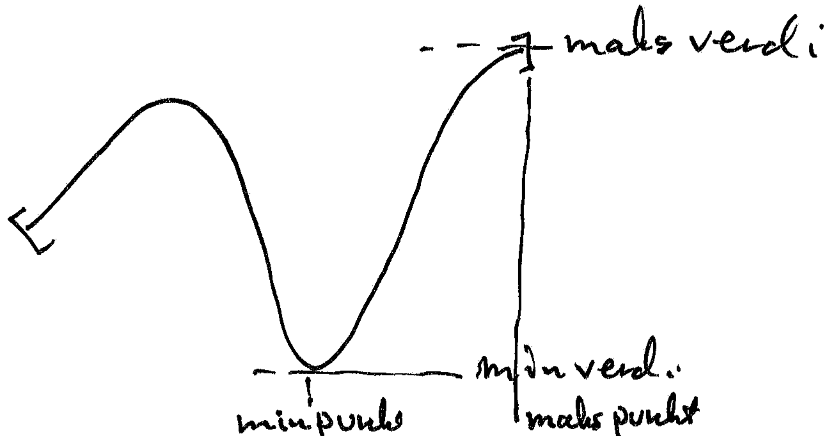


min punkt $x = -1$
makspunkt $x = 2$
min verdi er -1
maks verdi er 5.



$f(x) = 3$ alle x

alle x er min og maks punkt
3 er både maks og min verdi



Eksempel parabel $y = ax^2 + bx + c$

Anta $a = 1$: $y = x^2 + bx + c$

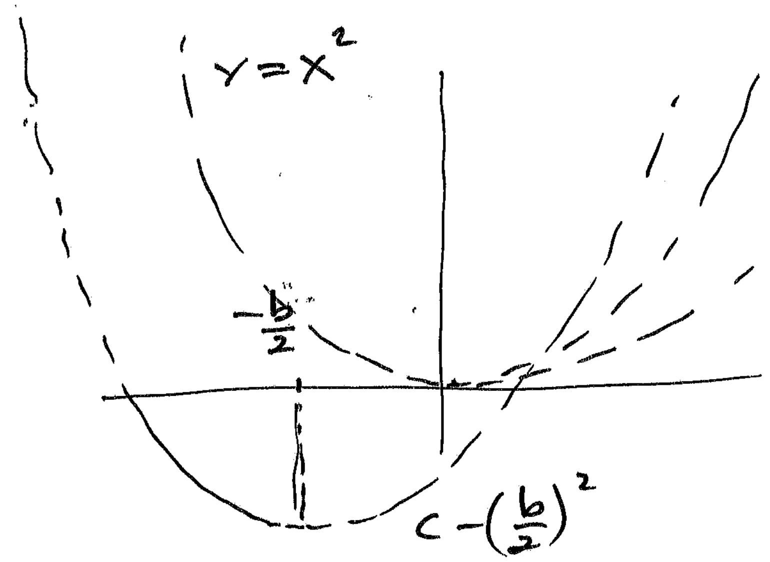
$y(x)$ har en minimumsverdi

4 $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

y har minst verdi når kvadratet $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = 0$

$\underline{x = \frac{-b}{2}}$

Minimumspunkt $\underline{x = \frac{-b}{2}}$



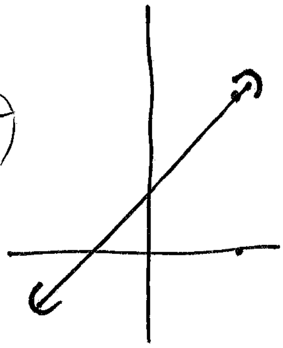
Alle parabler komme fra parabelen $y = x^2$ ved 1) skalering med $a \neq 0$
2) horisontal translasjon (forflytting)
3) vertikal translasjon.

$\Big(\; y' = 2x + b$

$y' = 0$
$2x + b = 0$
$x = \frac{-b}{2} \ldots \; \Big)$

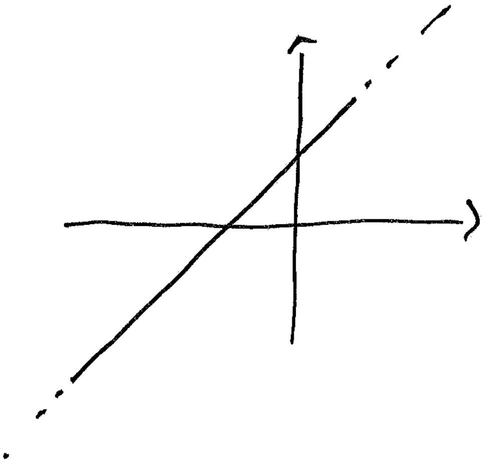
Funksjoner som ikkje har ekstremalpunkt:

5



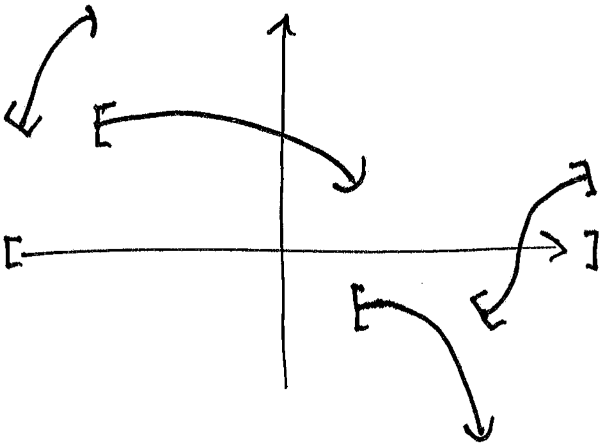
$f(x) = 2x + 1$

$D_f = (-2, 2)$ (endepunkt ikkje med)



$f(x) = 2x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$



$f(x)$ def på lukket intervall.

Ekstremalverdisetningen

Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon med en lukket begrenset definisjonsmengde, da har $f(x)$ både maksimums og minimumspunkt.

(En intervall er lukket om endepunktene er med.

$[1,2]$ lukket $\quad [1,2\rangle$ halvåpen $\quad \langle 1,2 \rangle$ åpen)

Grenser

(6) $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Når x nærmer seg a så nærmer f(x) seg L.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$ f(1) ikke definert.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \quad ?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)}{x} \quad ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)}{(1+x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x/(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1+x} = \underline{-1}$$

(7) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$?

$\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}-n\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}-n$

$= \lim_{n\to\infty} n\sqrt{(1+\frac{1}{n})}-n$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)}_{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$= \frac{1}{2}$