Leiv Øyehaug

- Kontor: PS240
- Epost: leiv.oyehaug@hioa.no

Reelle funksjoner:

- En funksjon f er en regel som til et tall i *definisjonsmengden* D_f til f tilordner et tall, f eks:
- $f: D_f \to \mathbb{R}$
- Mengden av funksjonsverdier til $f(x)$ kalles *verdimengden* V_f.
- Eksempel: $f(x) = \ln(x)$ har $D_f = \langle 0,\infty \rangle$ og $V_f = \mathbb{R}$.

Kontinuitet:

- En funksjon $f(x)$ sies å være *kontinuerlig* i $x = a$ dersom $f(x)$ går mot $f(a)$ når x går mot a. Skrives slik: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- De elementære funksjonene (polynomer, exp, sin, cos, ln) er kontinuerlige.

Skjæringssetningen:

- Dersom f er kontinuerlig og har motsatt fortegn i punktene a og b (dvs $f(a)f(b) < 0$) så finnes et nullpunkt c i $\langle a,b \rangle$ (altså hvor $f(c) = 0$).

Halveringsmetoden:

- Metode for å bestemme et nullpunkt c til en kontinuerlig funksjon f når vi vet at c er i intervallet $[a, b]$.
- Intervallet deles i to og vi bestemmer på hvilket av de to intervallene c må befinne seg.
- Halveringen fortsetter til vi har oppnådd ønsket nøyaktighet.
- Etter n halveringer er nøyaktigheten $\frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2^n}$.

Ekstremalverdisetningen:

- Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og definisjonsmengden til f er lukket og begrenset så har f maksimum og minimum.

Grenser:

- Vi skriver $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dersom $f(x)$ går mot verdien L når x går mot verdien a.
- Grensen kan eksistere selv om funksjonen ikke er definert. Eksempel:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Eksempel / oppgave:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$$

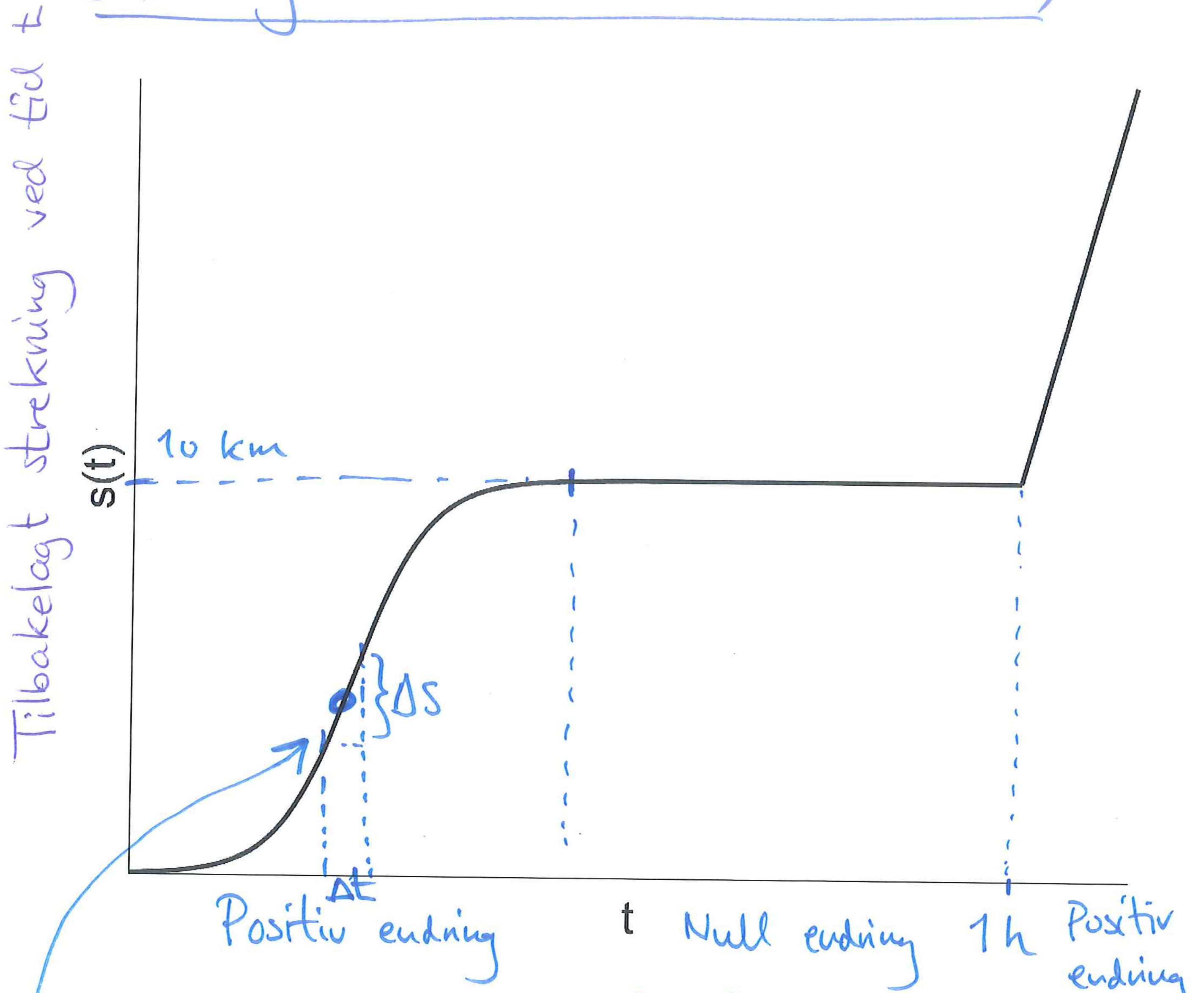
Har f nullpunkt(er) på $[0,1]$?

$$f(0) = 0^5 + 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 > 0$$

ɔ: I flg skjæringssetningen og pga kontinuiteten til f, må f ha <u>minst</u> ett nullpunkt på $\langle 0, 1 \rangle$.

Endringsrater (2.1 i Kalkulus)



$$\text{Gjennomsnittsfart} = \frac{10 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \underline{10 \text{ km/h}}$$

$$\text{Fart} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

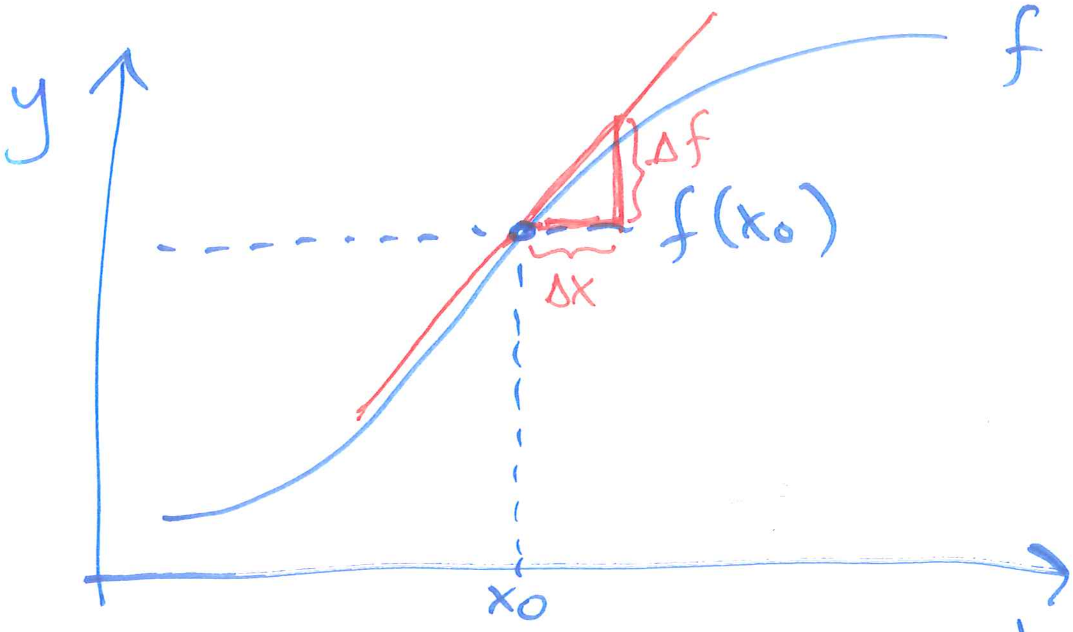
Endringsrate

$$\text{Øyeblikkelig fart} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$

$$\underbrace{\overset{= s'(t)}{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}_{\text{Def. av derivert}}$$

Den deriverte (2.3 i Kalkulus)



Tangenten til grafen til f:

Ligning:

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

Hva er stigningstallet a?

$$a = \frac{\text{Endring i } y}{\text{Endring i } x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Lineariseringen til f i x_0

$$\boxed{a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)}$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Notasjon :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}^{\Delta f}}{\Delta x}$$

Infinitesimale størrelser

Eksempel

Bestem ligningen til tangenten til $f(x) = x^2$ i $(1, \underbrace{f(1)}_{=1})$

Løsning:

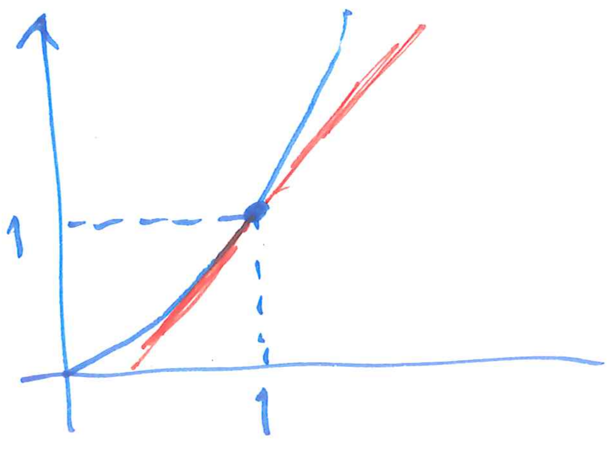
$$x_0 = 1, \quad f(x_0) = f(1) = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \underline{2}$$

$$\Rightarrow y = 2(x-1) + 1$$

$$= 2x - 2 + 1 = \underline{\underline{2x - 1}}$$



Hvorfor er deriverte viktige?

Fart:

$v(t) = s'(t) \quad \left(= \frac{ds}{dt}\right)$

Elektrisk ladning

Strøm:

$I(t) = q'(t) \quad \left(= \frac{dq}{dt}\right)$

Temperaturendring:

$T'(t)$ ← Newtons avkjølingslov

Økonomisk vekst: Alle piler peker over
- oppover (pos. derivert)
- nedover (neg. derivert)

Regneregler for deriverte:

Et hvilket som helst tall

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

Bevis:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{2x}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Konstante funksjoner

$$(a)' = 0$$

Faktorregelen

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

Summeregelen

$$(g \pm h)' = g' \pm h'$$

Produktregelen

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

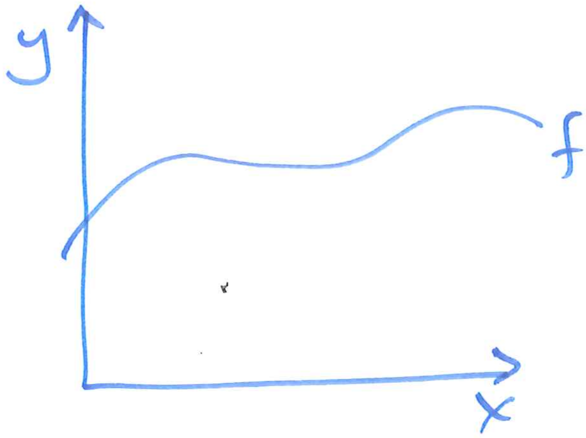
Kvotientregelen eller brøkregelen

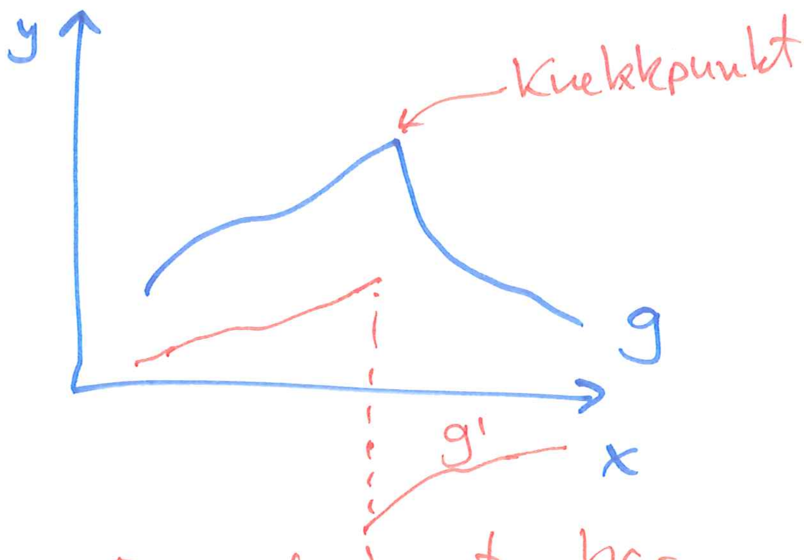
$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

Potensregelen

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Deriverbare funksjoner





f er deriverbar overalt.

Den deriverte har en diskontinuitet, ⊃: Ikke deriverbar i dette punktet.

<u>Definisjon:</u>

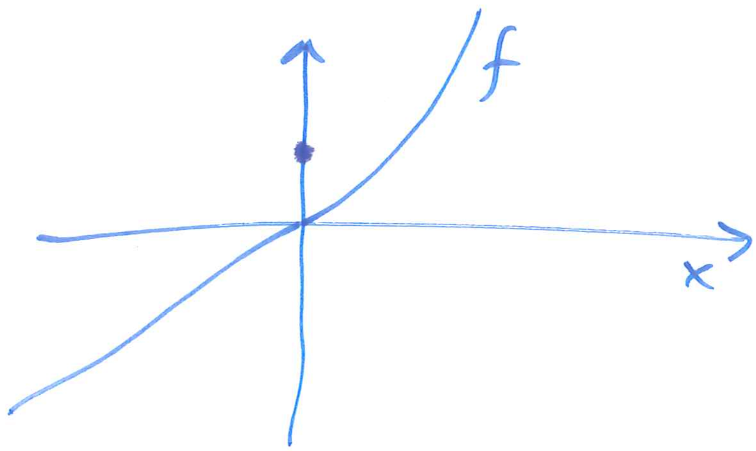
En funksjon f som har kontinuerlig derivert i $x=a$ er deriverbar i $x=a$.

Eksempel:

Gitt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Er f deriverbar i $x = 0$?



$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (1) = 1$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x+1) = 1$$

ɔ: Den deriverte er kontinuerlig.

Dvs f er deriverbar i $x = 0$.

Flere regneregler for derivasjon (2.4 i Kalkulus)

Hvordan deriverer vi funksjoner av typen

$$F(x) = e^{\cos x} \; ?$$

Dvs

$$F(x) = f(g(x))$$

med

$$g(x) = \cos x$$
$$f(u) = e^u$$

<u>Kjerneregelen</u>:

Når $F(x) = f(g(x))$ er

$$\boxed{F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Alternativ notasjon:

$$y = f(u),\; u = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Eksempel / oppgave:

$$F(x) = \sin(e^x)$$

Bestem $F'(x)$

Løsning:

$$f(u) = \sin u \Rightarrow f'(u) = \cos u$$

$$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$= \underline{\underline{\cos(e^x) \cdot e^x}}$$

Andrederivert

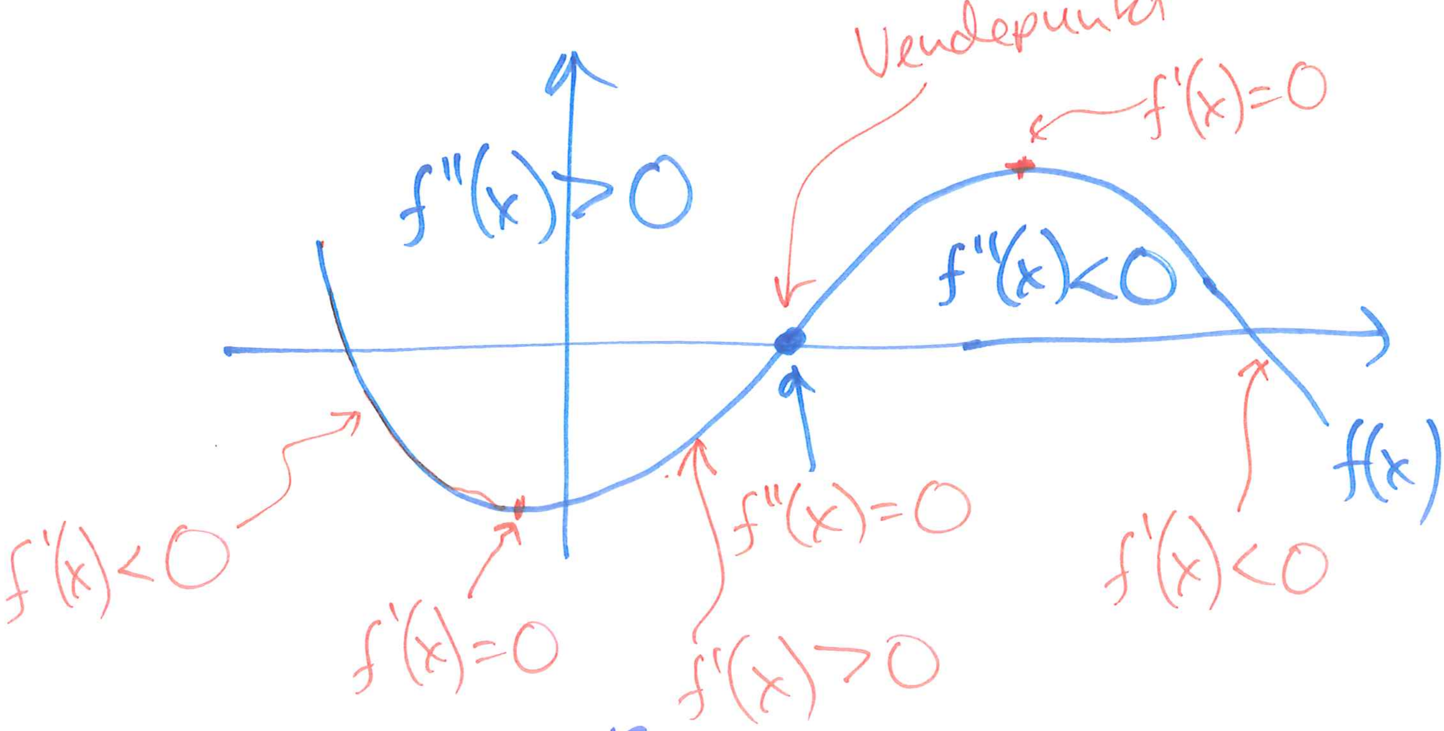
$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

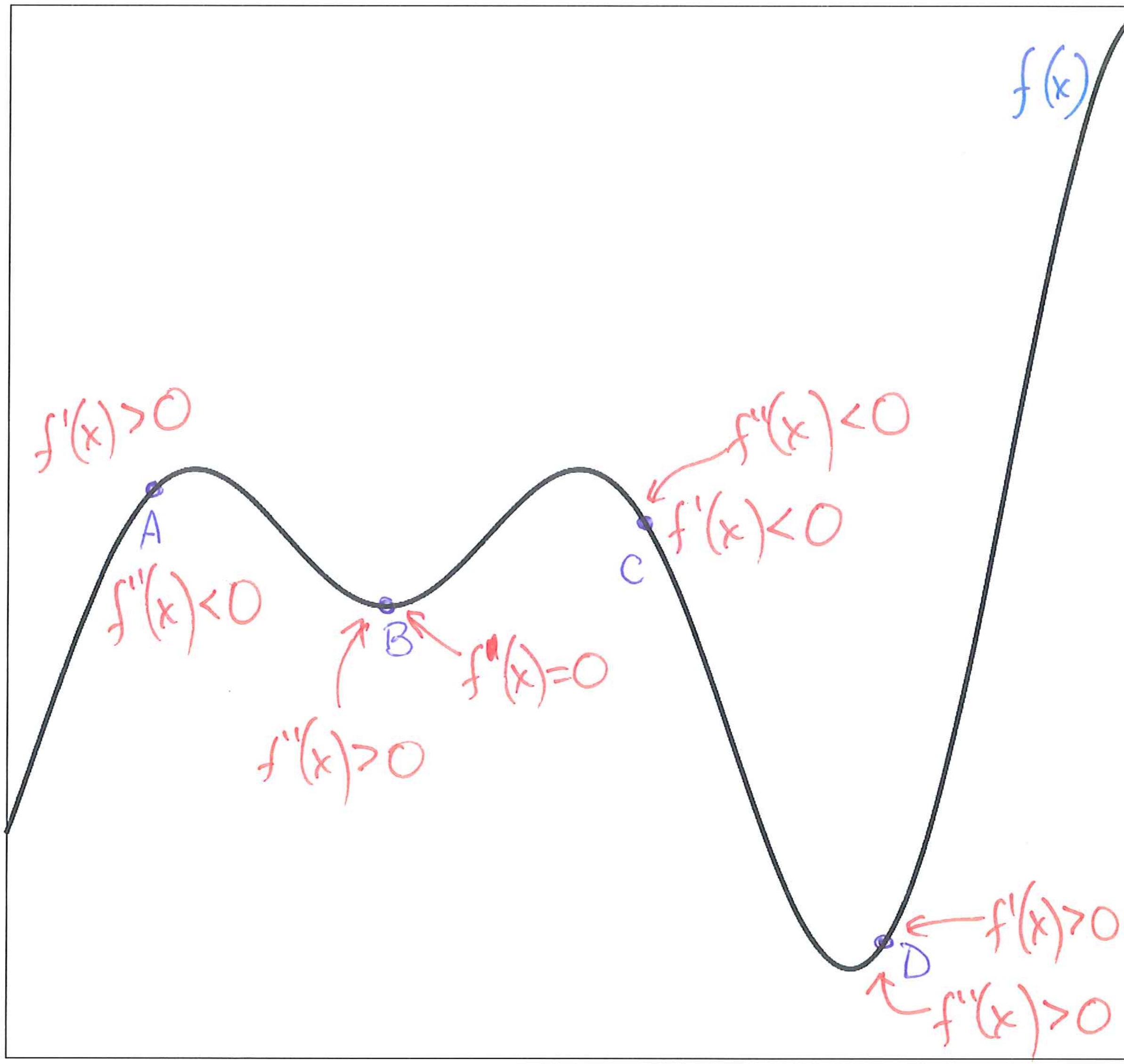
Alternativt: $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$.

Den deriverte forteller om endring.

Når $f''(x) > 0$ er grafen til f konkav oppover.

Når $f''(x) < 0$ er grafen til f konkav nedover.





1) Hva er fortegnet til $f'(x)$ og $f''(x)$ i A, B, C og D?

2) Finn deriverte og andrederiverte:

$$f(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = xe^x$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$