Endringsrater og derivasjon:

- Endringsraten til en funksjon: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
- Den deriverte: grensen av endringsraten når $\Delta x \to 0$:

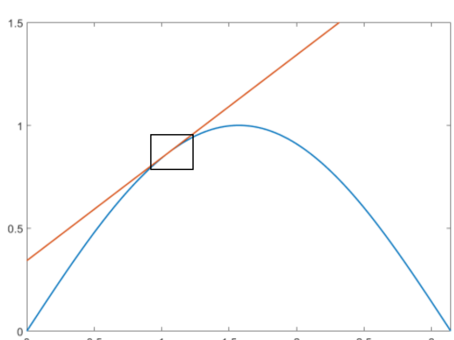
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

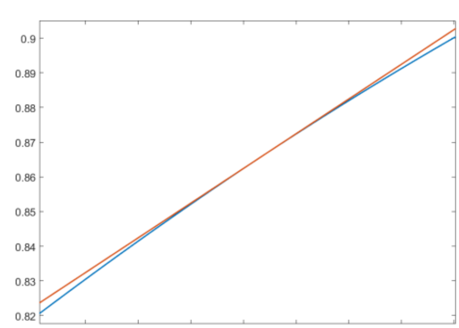
- Numerisk derivert (Δx liten):

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ eller, bedre, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Derivert som stigningstallet til tangenten:

- Tangenten har ligning $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Lineariseringen i $x = a$ er lik tangenten til f i $x = a$.
- God approksimasjon til f i nærheten av $x = a$.





Regneregler for deriverte:

Konstante funksjoner

$(a)' = 0$

Faktorregelen

$(a \cdot f)' = a \cdot f'$

Summeregelen

$(g \pm h)' = g' \pm h'$

Produktregelen

$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$

Kvotientregelen eller brøkregelen

$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$

Potensregelen

$(x^n)' = nx^{n-1}$

Deriverbare funksjoner:

- Definisjon: En funksjon hvor grensen $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ eksisterer i $x = a$ sies å være *deriverbar* i $x = a$.
- f er deriverbar dersom
  - f er kontinuerlig i $x = a$ og
  - $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$

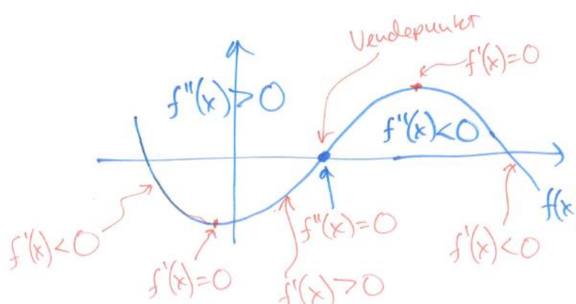
Kjerneregelen

- Når $F(x) = f(g(x))$, dvs en *funksjonsfunksjon,* er den deriverte

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Andrederivert

- Den deriverte av den deriverte. Notasjon: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$
- Når $f'' > 0$ er grafen til f *konkav oppover* (krummer oppover), når $f'' < 0$ er grafen til f *konkav nedover* (krummer nedover)



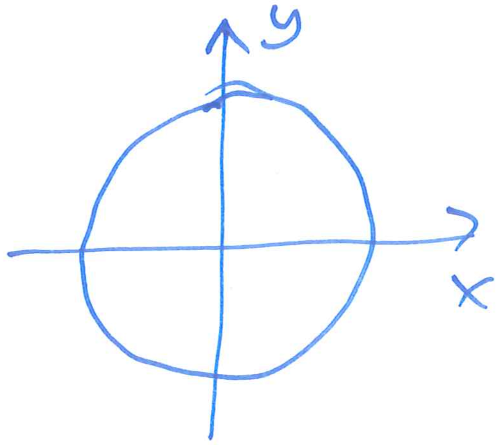
I dag:

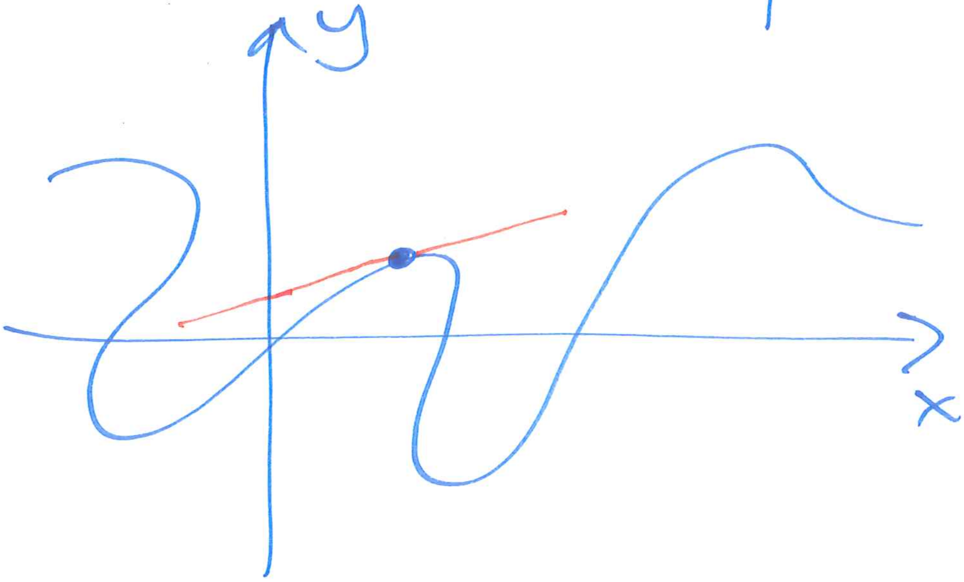
- Implisitt derivasjon (fra 2.4)
- Koblede hastigheter (3.1)
- Teoremer (3.2)
- Optimalisering (3.3)
- Newtons metode (3.4)

Implisitt derivasjon (2.4 i Kalkulus)

$\underbrace{f(x) = x^2}_{\text{Eksplisitt gitt}}$, $f'(x) = 2x$

$x^2 + y^2 = 1$





Eksempel:

$$x^2y + y^3 - 3x + 1 = 0 \quad (*)$$

$y = y(x)$: funksjon av x.

Uttrykk $\frac{dy}{dx}$ ved x og y:

Deriver hver side av $(*)$:

Vs: $\frac{d}{dx}\left[x^2y + y^3 - 3x + 1\right]$

$$= 2x \cdot y + x^2\frac{dy}{dx} + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 3$$

Hs: $\frac{d}{dx}[0] = 0$

Vs = Hs:

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3 = 0$$

Rydder litt:

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 3 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 3y^2}$$

$$x^2y + y^3 - 3x + 1 = 0$$

a) Vis at (1,1) ligger på grafen til y.

b) Regn ut stigningstallet til tangenten i dette punktet.

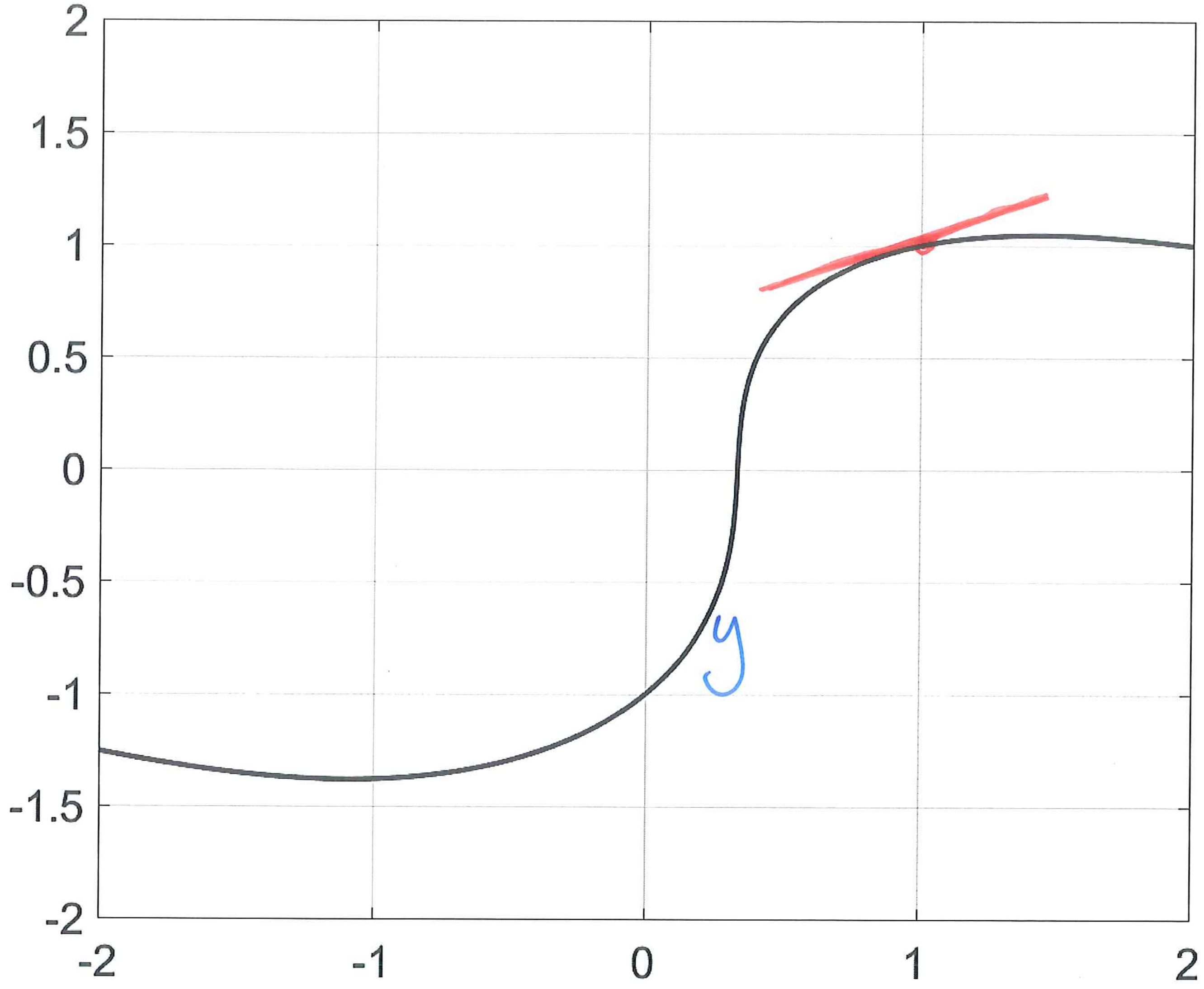
Løsning:

a) $x=1, y=1$:

$$1^2 \cdot 1 + 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \qquad \text{OK!}$$

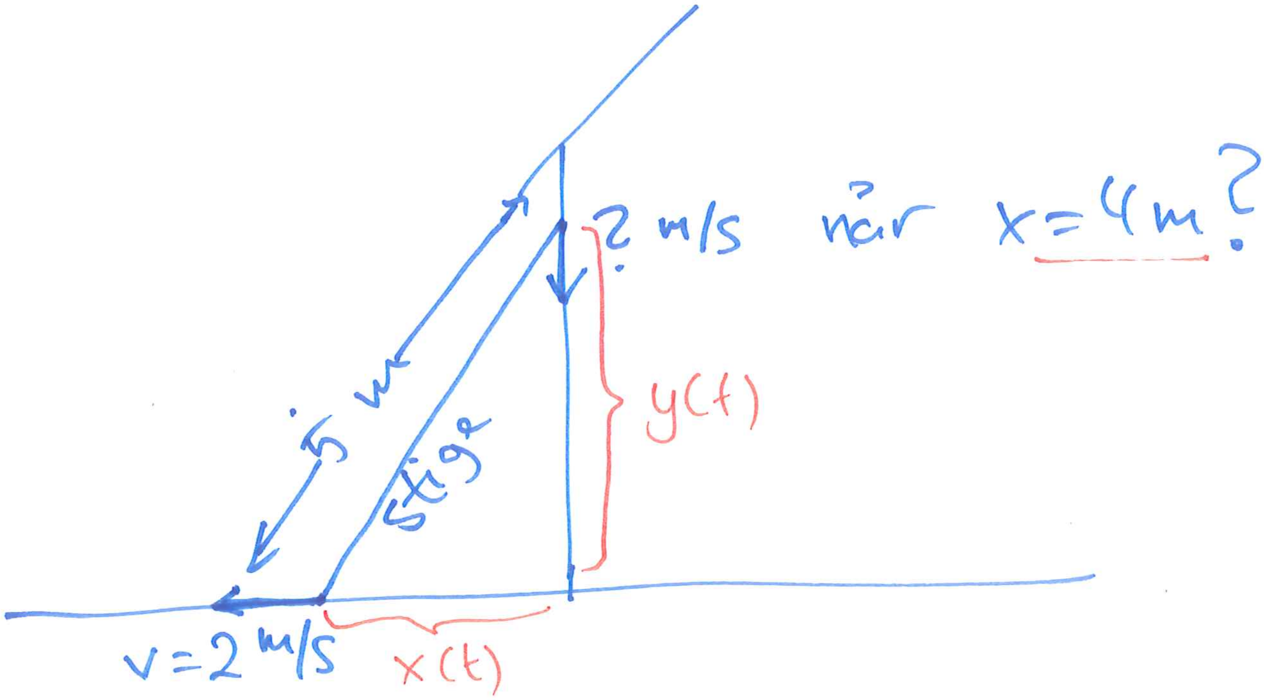
b) Stigningstallet = den deriverte $\frac{dy}{dx}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{3 - 2 \cdot 1 \cdot 1}{1^2 + 3 \cdot 1^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1
0
1
2
y

Koblede hastigheter (3.1 i Kalkulus)

Eksempel (3.11)

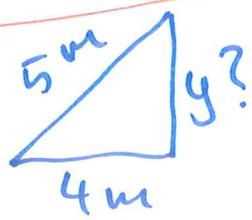


Horisontal hastighet : $x'(t)$

Vertikal " : $y'(t)$

Pytagoras : $x^2(t) + y^2(t) = 5^2$

Deriverer : $2\underbrace{x(t)}_{4m}\cdot\underbrace{x'(t)}_{2\,m/s} + 2\underbrace{y(t)}_{}\cdot\underbrace{y'(t)}_{\text{Ukjent}} = 0$



$y = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3m}}$

$$2 \cdot 4m \cdot 2 m/s + 2 \cdot 3m \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow y' \cdot \cancel{2} \cdot 3m = -\cancel{2} \cdot 4 \cdot m \cdot 2 m/s$$

$$y' = -\frac{8}{3} m/s$$

Problem

1. To størrelser varierer med tiden t. (I eksempel 3.1.1 var det $x(t)$ og $y(t)$.)
2. De to størrelsene er koblet på en slik måte at kjenner en verdien av den ene, så kan man i prinsippet finne verdien av den andre. (Koblingen svarer til likning (1) i eksempel 3.1.1.)
3. Vi kjenner endringsraten til den ene størrelsen og søker endringsraten til den andre.

Fremgangsmåten for å løse slike problemer er klar:

Slik gjør vi

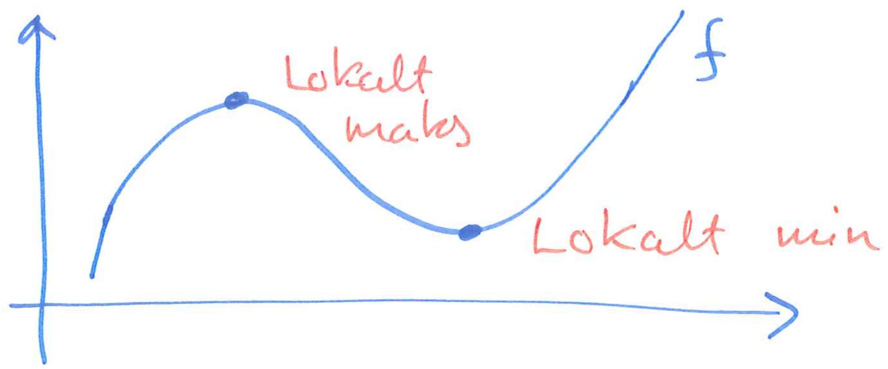
4. Beskriv koblingen mellom de to størrelsene ved en likning (likning (1) i eksempel 3.1.1). Det krever at vi har (valgt) bokstaver (navn) for de to størrelsene.
5. Deriver likningen med hensyn på t. Det gir en ny likning som beskriver koblingen mellom de to hastighetene (likning (2) i eksempel 3.1.1).
6. Sett inn verdier som gjelder ved det aktuelle tidspunktet, og løs den nye likningen med hensyn på den ukjente hastigheten.

Teoretiske resultater

(Sekantteoremet, 3.2 i Kalkulus)

Lokalt maks i $x=c$: $f(x) \leq f(c)$ for alle x i en omegn om x

Lokalt min i $x=c$: $f(x) \geq f(c)$ for alle x i en omegn om x



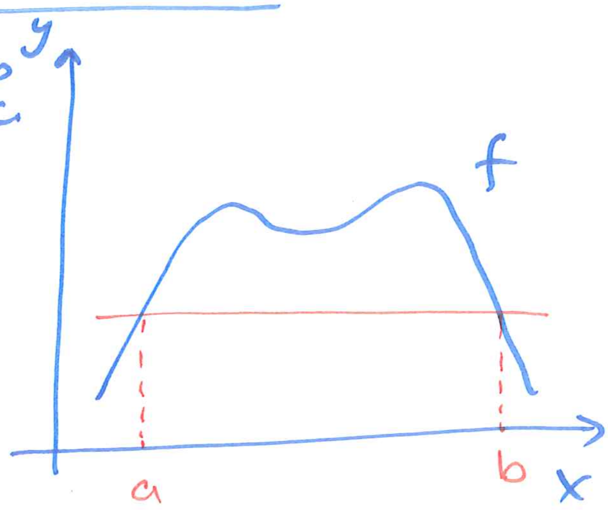
Teorem (3.2.2 i Kalkulus)

Dersom f har lokalt $\underbrace{\text{maks eller min}}_{\text{Ekstremal-punkt}}$ i et indre punkt $c \in D_f$ og f er deriverbar i c, så er $f'(c)=0$.

Her: Anta at f er kontinuerlig i $[a,b]$ og deriverbar i $\langle a,b \rangle$.

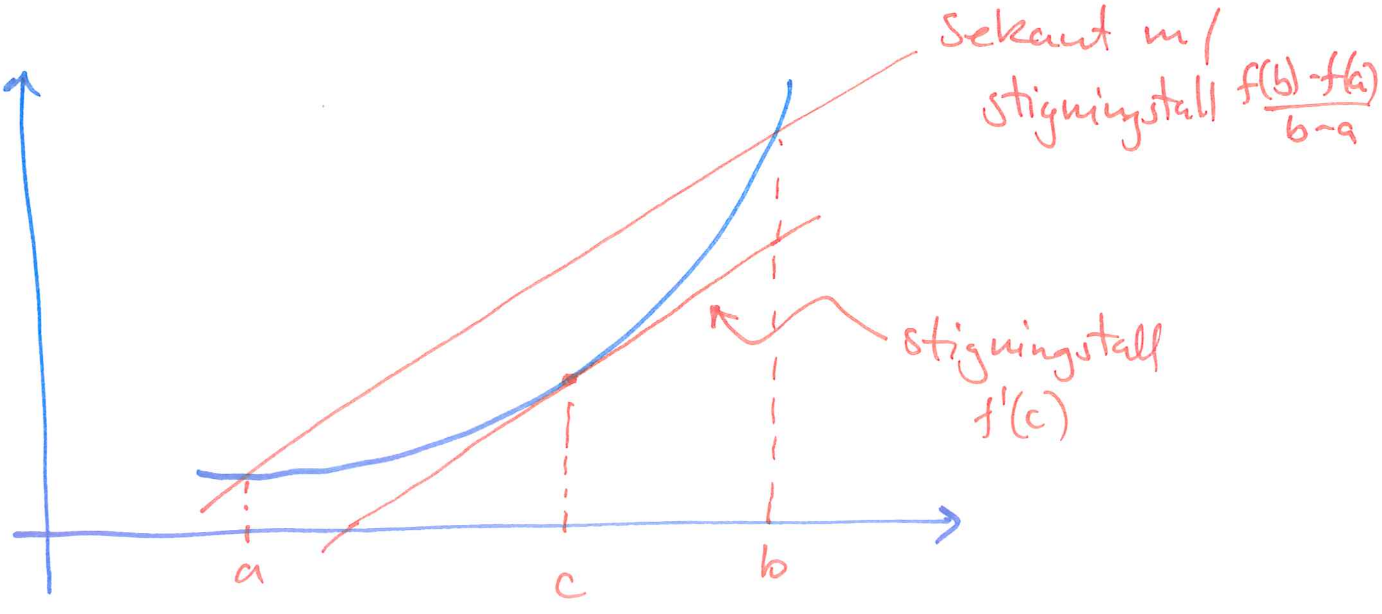
Rolles teorem (3.2.4 i Kalkulus)

Dersom $f(a) = f(b)$ så finnes $c \in \langle a,b \rangle$ slik at $f'(c) = 0$



Sekantteoremet (3.2.5 i Kalkulus)

Det finnes $c \in \langle a,b \rangle$ slik at $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$



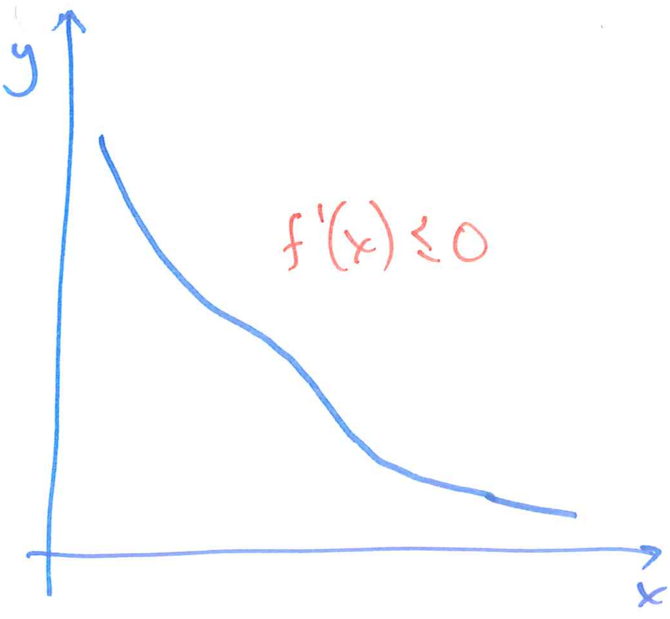
Voksende og avtagende funksjoner

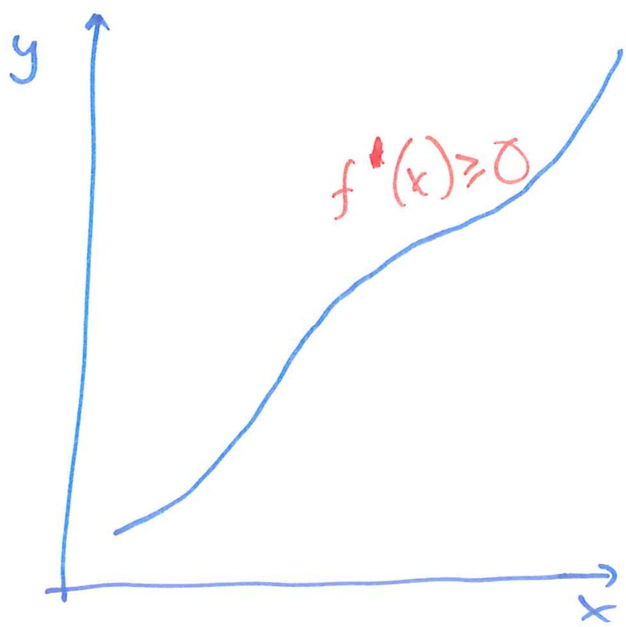
Teorem (3.2.8 i Kalkulus)

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig i $[a,b]$.

a) Dersom $f'(x) \leq 0$ for $x \in \langle a,b \rangle$ er f strengt avtagende i $[a,b]$.

b) Dersom $f'(x) \geq 0$ for $x \in \langle a,b \rangle$ er f strengt voksende i $[a,b]$.



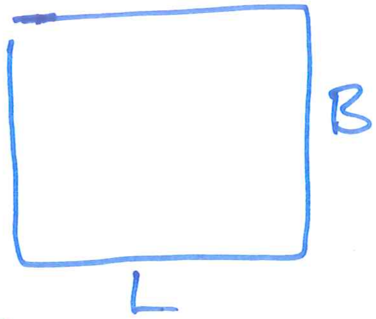


Optimalisering

Eksempel (3.3.1)

Tot. lengde = 20 cm

$A = LB$



Omkretsen: $2L + 2B = 20$

$L + B = 10 \Rightarrow B = 10 - L$

$\Rightarrow A = L(10 - L)$

$A(x) = x(10 - x)$, $x \geq 0$, $x \leq 10$

Hva må x være for at A skal bli så stor som mulig?

Ser etter punkter hvor $A'(x) = 0$.

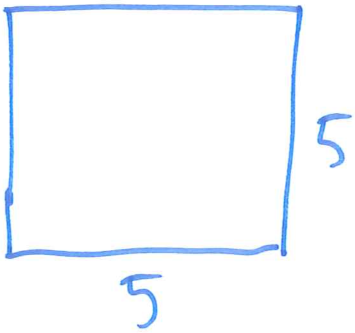
$$A(x) = 10x - x^2$$

$$A'(x) = 10 - 2x$$

$A'(x) = 0$ når $10 - 2x = 0$

$$10 = 2x$$

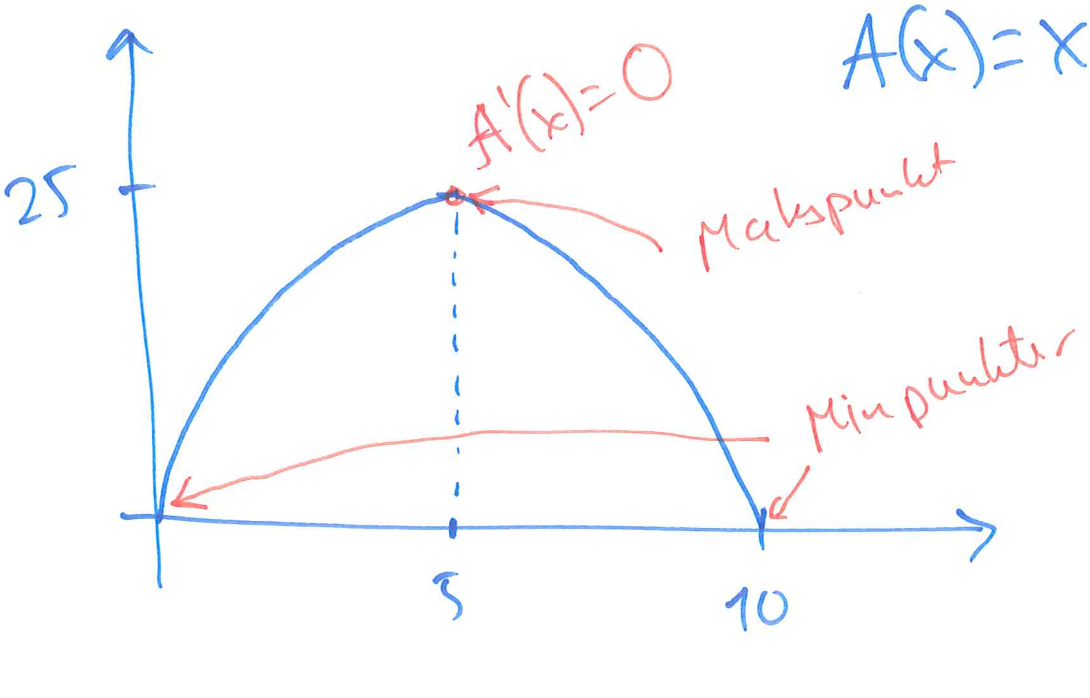
$$\underline{\underline{x = 5}} = L$$



$\Rightarrow \quad B = 10 - 5 = \underline{5}$

$\Rightarrow \quad A = 5 \cdot 5 = \underline{\underline{25\ cm^2}}$

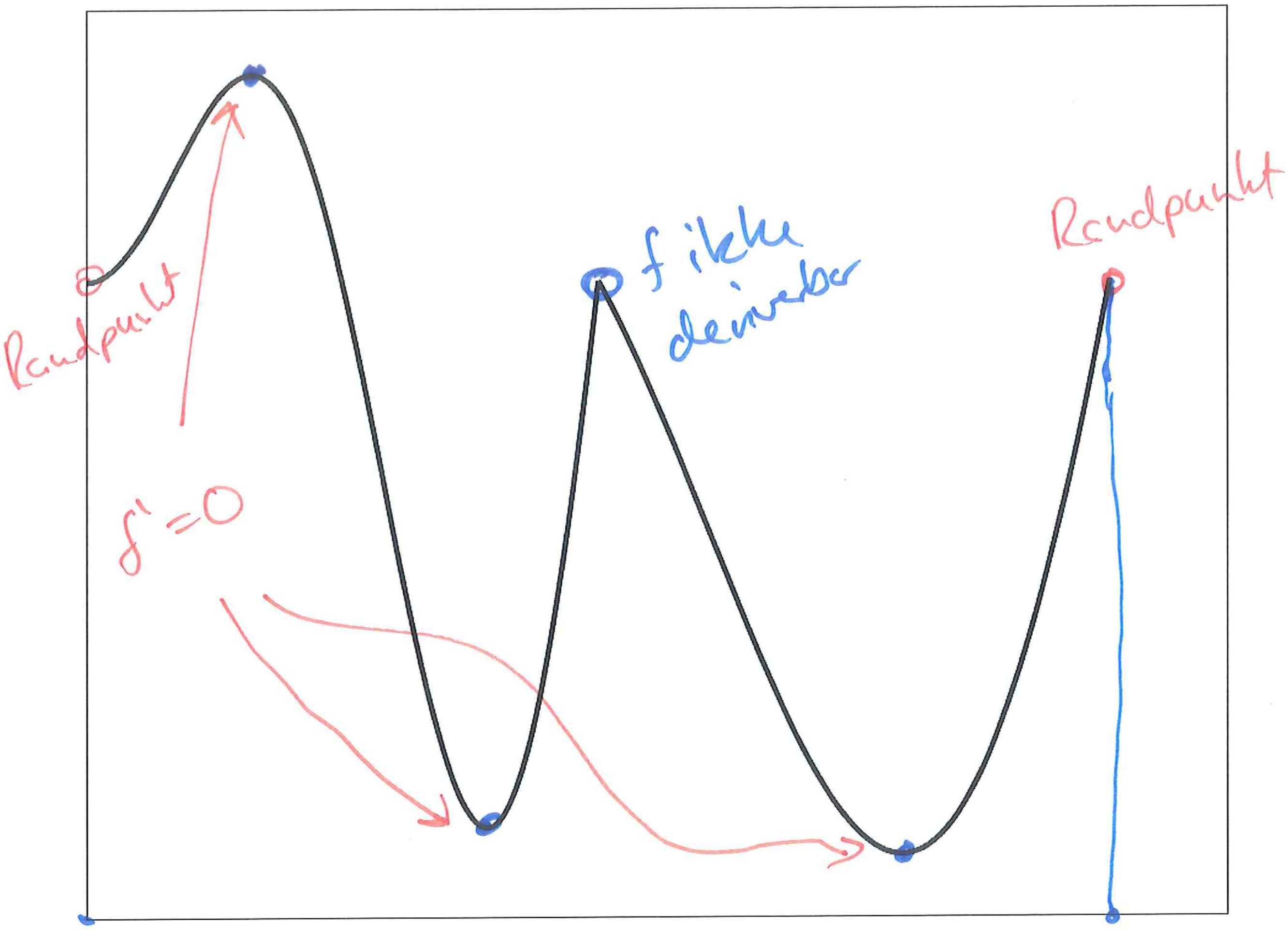
$$A(x) = x(10 - x)$$



Teorem (3.7.2)

c er et maks- eller min-punkt til f på $D \subseteq D_f$. Enten:

1. c et randpunkt i D.
2. $f'(c) = 0$ eller
3. f ikke deriverbar i c.


Randpunkt
$f' = 0$
f ikke deriverbar
Randpunkt

Eksempel (3.3.7)

$f(x) = x^3 - 3x$, def. på $\langle -5, 2]$

Finn lokale og globale maks- og min-punkter.

f er deriverbar på $\langle -5, 2]$.

Randpunkter: Kun $x = 2$.

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2.$$

$\boxed{(2,2)}$ er et potensielt ~~maks~~/min-punkt.

Punkter hvor $f'(x) = 0$:

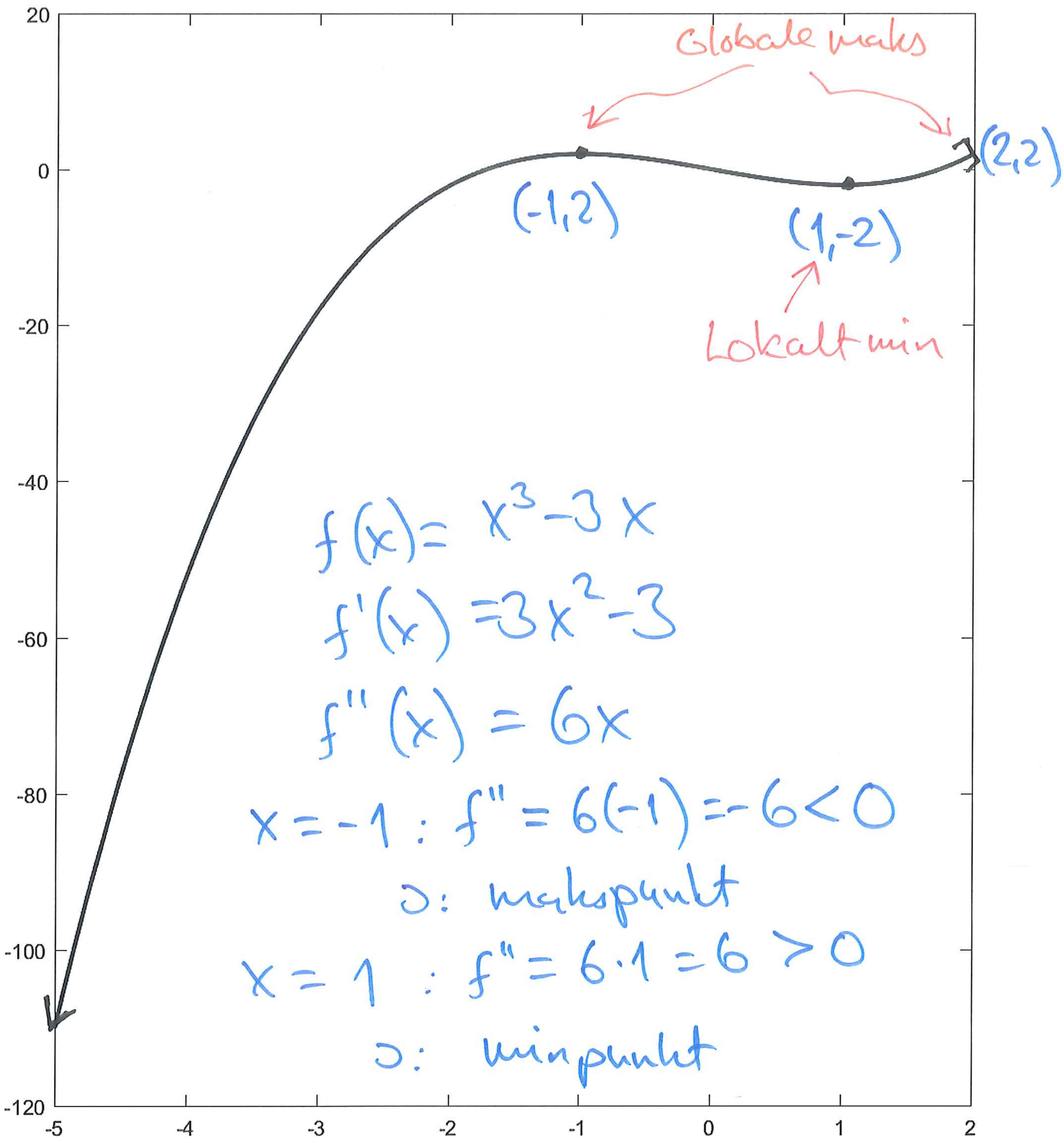
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \left(= 3(x^2 - 1) = 0 \text{ når } x = \pm 1 \right)$$

$$\Rightarrow: \quad x = \pm 1$$

$x = 1$: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

$x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$.

Potensielle: $(1, -2)$, $(-1, 2)$



$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$x = -1 : f'' = 6(-1) = -6 < 0$

ɔ: makspunkt

$x = 1 : f'' = 6 \cdot 1 = 6 > 0$

ɔ: minpunkt

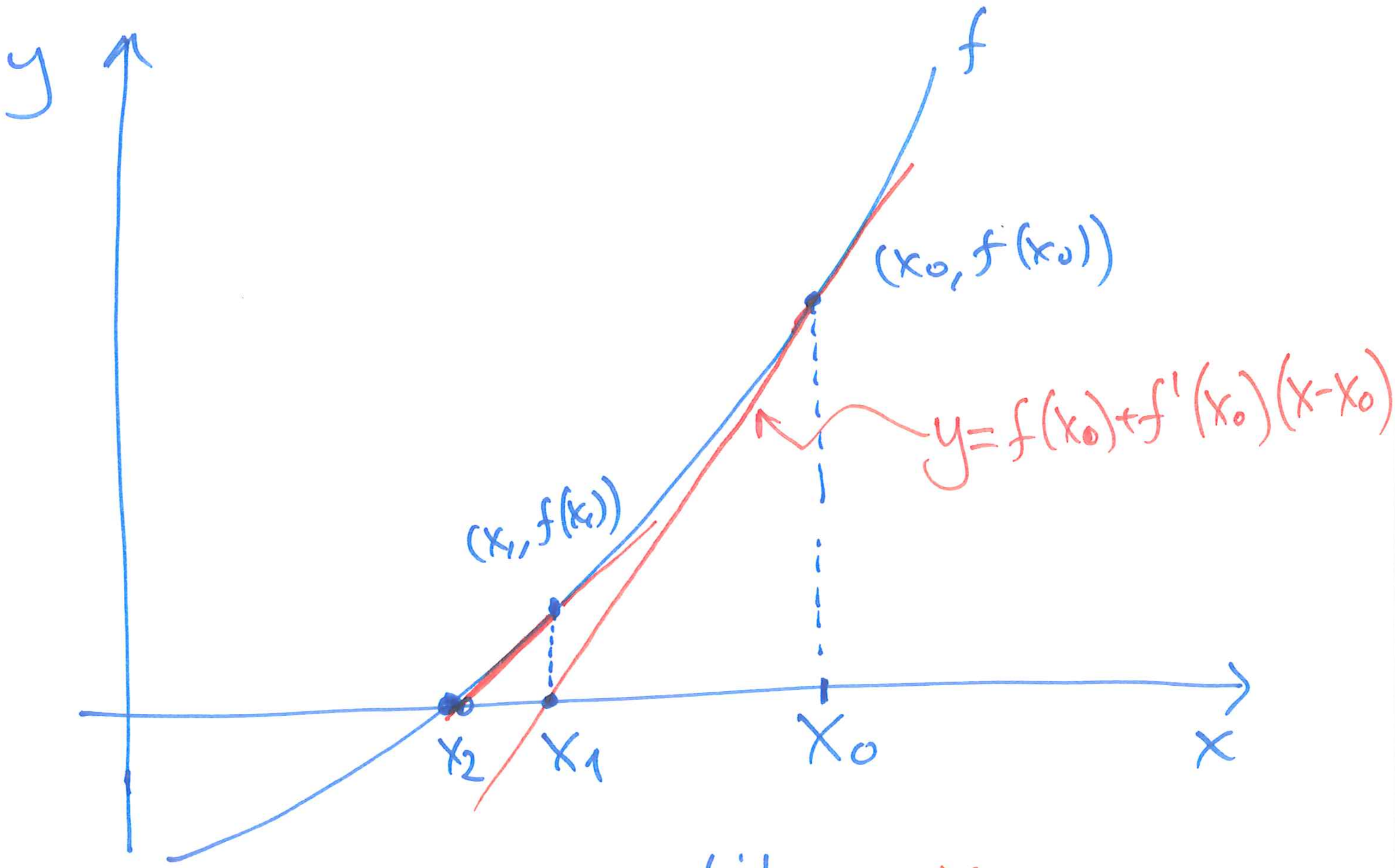
Newtons metode (3.4 i Kalkulus)

$$f(x) = 0$$

Bestemme x

Løsbar: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Ikke løsbar: $x \sin x + x^2 e^x - 2 = 0$



x_1 er løsning til $= x_1$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Newtons metode.