Oppsummering forrige gang

Integrasjon av rasjonale funksjoner

Vil regne ut $\int R(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ Polynomer

«Oppskrift»:

1. Dersom graden til $P \geq$ graden til Q: Skriv R på redusert form (f eks ved polynomdivisjon)
2. Dersom graden til $P <$ graden til Q og

   $Q(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$:

   Bruk delbrøksoppspalting til å skrive

$$R(x) = \frac{C_1}{x - r_1} + \frac{C_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{C_n}{x - r_n}$$

Oppgave

Regn ut

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx$$

Hint: Bestem C_1 og C_2 i

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(x+2)}$$

Løsning

Setter på felles brøkstrek:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{C_1(x+2) + C_2\,(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Tellerne må være like for alle x, bl.a. for $x = -2$ og for $x = 1$ (takk for tips!)

$x = 1$: $-2 = C_2(-2-1) \Rightarrow C_2 = 2/3.$

$x = -2$: $1 = C_1(1+2) \Rightarrow C_1 = 1/3.$

Løsning

Dermed:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}$$

Da er

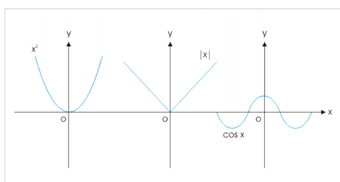
$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}\right)dx$$

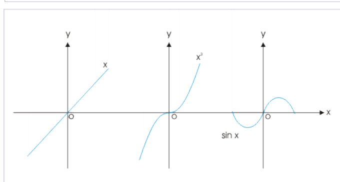
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+2}dx$$

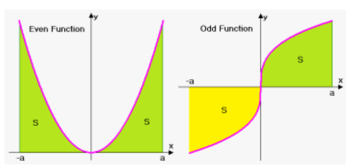
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + C$$

Hint til obligen: jevne og odde funksjoner

- Jevne funksjoner: $f(-x) = f(x)$
- Odde funksjoner: $f(-x) = -f(x)$
- Integrasjon:
- f jevn: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
  - Eksempel: $\int_{-a}^{a} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{a} \cos x \, dx$
- f odde: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
  - Eksempel: $\int_{-a}^{a} \sin x \, dx = 0$







Integraler med sin og cos

Regn ut $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

Sentral identitet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Løsning: Skriv $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$$

$$= \int \sin^3 x \,(1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$
$$= \int \sin^3 x \,(1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$
$$= \int \sin^3 x \cos x\, dx - \int \sin^5 x \cos x\, dx$$

Kan vi løse disse?
Ja. Velg $u = \sin x$. Da er $u' = \cos x$ slik at $dx = du/\cos x$ og

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int u^3 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \int u^5 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C$$

Bro: Integrasjon → differensialligninger

Oppgavene

Regn ut $\int f(x) dx$

Bestem y når $\boxed{y' = f(x)}$

er ekvivalente

Differensialligning

Oppgaver

1. Bestem y når $y' = x - 3x^2$.

2. Finn en løsning som tilfredsstiller $y(0) = 1$.

Løsning:

1. Antideriverer: $y = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + C$.

2. Skal ha $y(0) = 1$: $y(0) = \frac{1}{2}0^2 - 0^3 + C = C$

   Dermed: $C = 1$ slik at $y = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 1$.

Hva er en differensialligning?

(kapittel 4)

A. Matematisk:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Eks: $y' - x + 3x^2 = 0$

B. Verbalt:

En sammenheng mellom en variabel x, en funksjon y og de deriverte til y $(y', y'', \dots)$.

Matematiske modeller av virkeligheten er veldig ofte av denne typen.

Eksempler fra fysikk (4.1)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

a = akselerasjon :

$$a(t) = v'(t)$$

Eks. (4.1.4)

En bil har akselerasjon

$$a(t) = \frac{25}{2} - 2t + \frac{t^2}{6} - \frac{4t^3}{675} \quad (m/s^2)$$

for $0 \le t \le 15$ (s). Farten er 0 i $t=0$.

Hva er farten i $t = 15$ (s) ?

Løsning :

Differensial-
ligning, v ukjent

$$a(t) = v'(t)$$

$$\Rightarrow v'(t) = \frac{25}{2} - 2t + \frac{t^2}{6} - \frac{4t^3}{675}$$

I tillegg: $v(0) = 0$.

Startverdiproblem

Vi løser ved antiderivasjon:

$$v(t) = \int \left(\frac{25}{2} - 2t + \frac{t^2}{6} - \frac{4t^3}{675} \right) dt$$

$$= \underbrace{\frac{25}{2}t - t^2 + \frac{1}{18}t^3 - \frac{t^4}{675} + C}_{\text{Generell løsning av differensiallikninga}}$$

Bestemmer C ved å kreve at $v(0)=0$:

$v(0)=0$: $\quad \underline{C=0}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{25}{2}t - t^2 + \frac{1}{18}t^3 - \frac{t^4}{675}$$

$$v(15) = \frac{25}{2}15 - 15^2 + \frac{1}{18}15^3 - \frac{15^4}{675} = \underline{75 \text{ m/s}}$$

Eks: konstant akselerasjon med

$v(0) = v_0 \quad , \quad s(0) = s_0 \quad .$

Konstant akselerasjon: $v'(t) = a$

Antiderivasjon $\Rightarrow v(t) = at + C_1$

$v(0) = v_0 \quad : \quad v_0 = a \cdot 0 + C_1$

$\Rightarrow v(t) = at + v_0$

$$s'(t) = v(t)$$

$$s'(t) = at + v_0$$

Antiderivasjon $\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + C_2$

$s(0) = s_0 \quad : \quad \underline{s_0} = \frac{1}{2} a \cdot 0 + v_0 \cdot 0 + \underline{C_2}$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0}$$

Eks: Fritt fall

Hvor langt faller et legeme på 10 s

når $v_0 = 0$ (se bort fra luftmotstand)?

$$s(10) - s_0 = \frac{1}{2}\underbrace{a}_{g \approx 9.8\,m/s^2} \cdot 10^2 + \overbrace{v_0}^{=0} \cdot 10$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot 100\,\cancel{s}^2$$

$$= \underline{490 \; m}$$

Modeller (4.2)

Dyrebestander

$N(t)$ = antallet dyr i en bestand ved tid t.

Endringsraten til $N(t)$ kan ~~ses på~~ være ~~som~~ proporsjonal med $N(t)$: proporsjonal med

$x \propto y$

$\Leftrightarrow x = k \cdot y$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = k \cdot N(t)$$

$$N'(t) = kN(t)$$

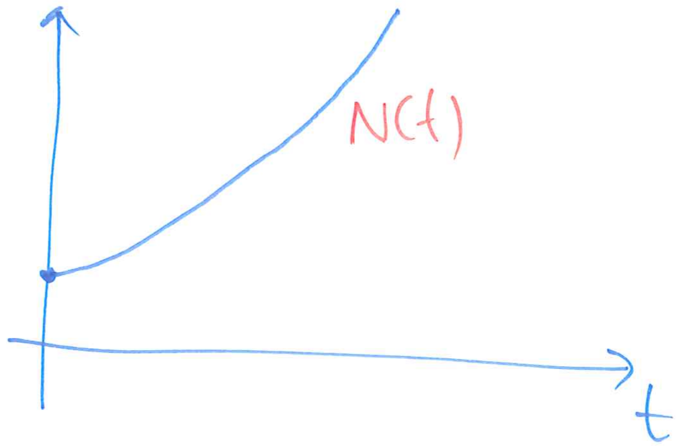
Løsning: $\boxed{N(t) = Ce^{kt}}$. Fordi:

$$Vs = N'(t) = \left(Ce^{kt}\right)' = \underbrace{Ce^{kt}}_{N(t)} \cdot k = kN(t) = Hs$$

$$Vs = Hs!$$

C kan være hva som helst!

Hva skjer med $N(t)$ når $t \to \infty$?
(anta at $k > 0$)



Mer realistisk modell:

$$N'(t) = \underbrace{kN(t)}_{\text{formering}} - \underbrace{aN(t)^2}_{\text{"døds"ledd}}$$

$$= N(t)\big(k - aN(t)\big)$$

Newtons avkjølingslov

Temperaturendringen i et legeme er proporsjonal med differansen mellom $\underbrace{T(t)}_{\text{temperaturen i legemet}}$ og omgivelsestemperaturen $= 20°C$

$$T'(t) = k(T(t) - 20)$$

Hvordan løser vi denne differensialligningen?

Setter $u(t) = T(t) - 20 \Rightarrow T(t) = u(t) + 20$

$$\Rightarrow u'(t) = T'(t)$$

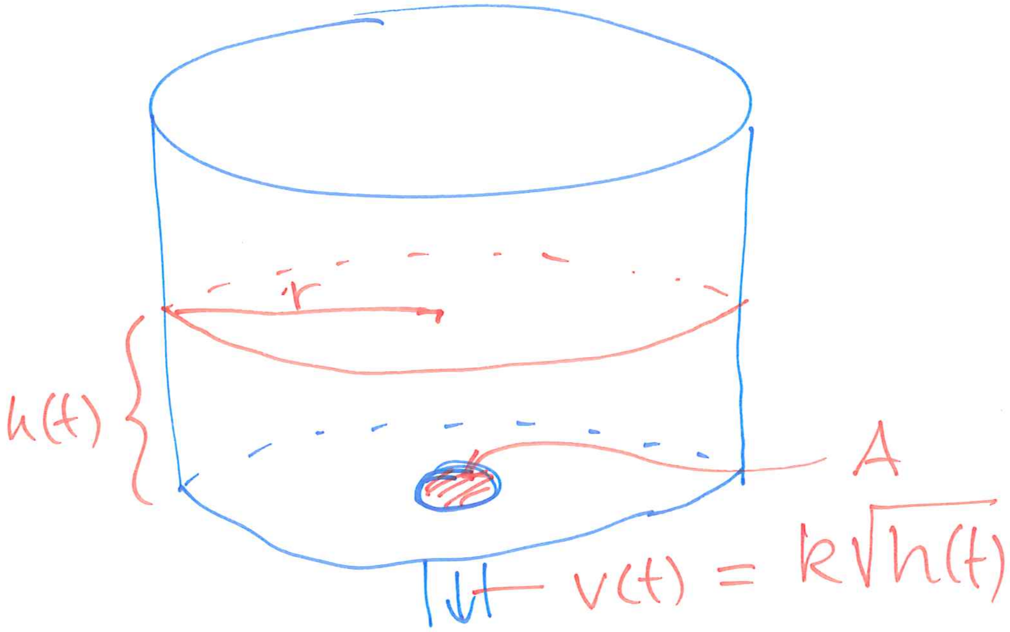
$$\Rightarrow u'(t) = k\,u(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = C e^{kt}$$

$$T(t) = u(t) + 20 = Ce^{kt} + 20$$

Hva er fortegnet til k? $\underline{k < 0}$

Torricellis lov: "Hastigheten til en væske som strømmer gjennom et lite hull er proporsjonal med kvadratroten til væskehøyden i kart."



$V(t)$ = volum av væsken i kart

$$\underbrace{\text{Volumendring per tidsenhet}}_{``V'(t)"} = -Av(t) = \boxed{-A \cdot k\sqrt{h(t)}}$$

$$V(t) = \pi r^2 h(t) \Rightarrow V'(t) = \boxed{\pi r^2 h'(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi r^2 h'(t) = -A \cdot k\sqrt{h(t)}}$$