Oppsummering 11/4

Andreordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter

- På formen

$$y'' + py' + qy = 0$$

- Karakteristisk ligning (fås ved å anta $y = e^{rx}$)

$$r^2 + pr + q = 0$$

- Tre tilfeller:
  - To ulike reelle røtter r_1 og r_2: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
  - To like reelle røtter r: $y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$
  - To ulike komplekse røtter $a + ib$ og $a - ib$:
    $y = e^{ax}(\, C\cos(bx) + D\sin(bx))$

Andreordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter: startverdiproblem

- To vilkårlige konstanter (C og D)
- Da trengs to startverdier for å spesifisere disse konstantene
- Eksempel: Løs startverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$$

Karakteristisk ligning er $r^2 + 2r - 3 = 0$ som har røtter $r_1 = 1$, $r_2 = -3$ slik at

$$y(x) = Ce^{x} + De^{-3x}.$$

Andreordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter: startverdiproblem

Bruker $y(0) = 0$:

$$Ce^{0} + De^{-3\times 0} = C + D = 0.$$

Bruker $y'(0) = 1$:

$y'(x) = Ce^{x} - 3De^{-3x}$

$$Ce^{0} - 3De^{-3\times 0} = C - 3D = 1.$$

Trekker den ene ligningen fra den andre:

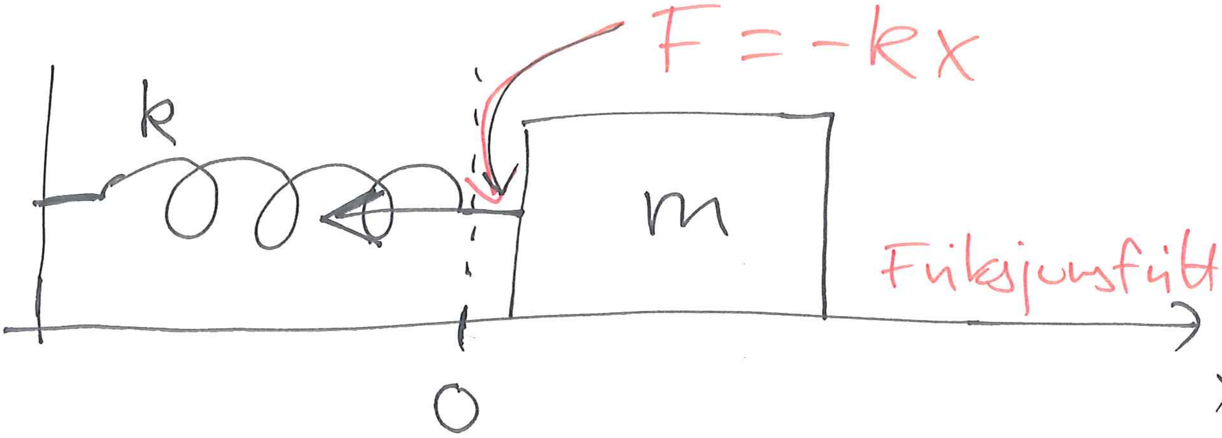
$$C - 3D - (C + D) = -4D = 1 - 0$$

$$\Rightarrow D = -\frac{1}{4} \Rightarrow C = -D = \frac{1}{4}.$$

Dermed:

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

Anvendelser i fysikk: (4.9)



$$\sum F = ma \quad \text{(Newtons 2. lov)}$$

$$\Rightarrow -kx = ma \qquad a = v' = x''$$

$$-kx = mx''$$

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\boxed{x'' + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$r^2 = -\omega^2$$

$$r = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

$r = a \pm ib : a = 0, b = \omega$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

Modell med friksjon:

Friksjonskraften $\propto v$

$$= lv = lx'$$

$$\sum F = -kx - lx'$$

$$\sum F = ma : -kx - lx' = mx''$$

$$\Rightarrow \quad x'' + \frac{l}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

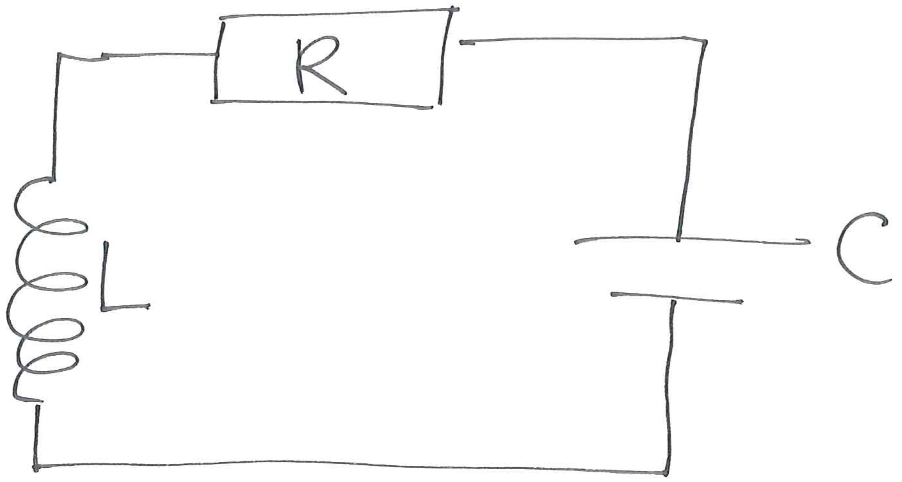
Karakteristisk ligning:

$$r^2 + \frac{l}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

$a = -\frac{l}{2m}$

$$r = \frac{-l/m \pm \sqrt{(l/m)^2 - 4\omega^2}}{2}$$

RLC - kretser



$\sum$ Spenningstap $= 0$

Spole : $LI'(t)$

Motstand : $RI(t)$

Kondensator : $\dfrac{q(t)}{C}$

$$q'(t) = I \Rightarrow I = q'$$
$$I' = q''$$

$$LI' + RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Karakteristisk ligning:

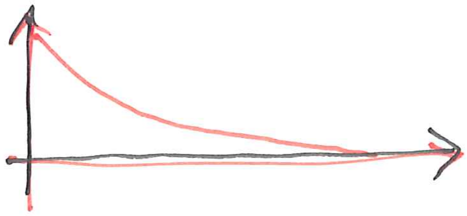
$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$$

$$r = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Hva slags løsninger når

a) $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0$

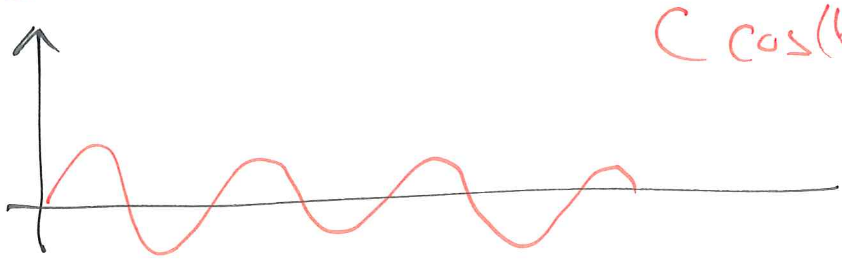
To ulike reelle røtter: $Ce^{\overset{<0}{r_1} t} + De^{\overset{<0}{r_2} t}$



b) $R = 0$

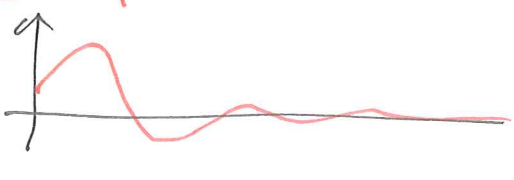
To komplekse røtter $\pm ib = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}}$

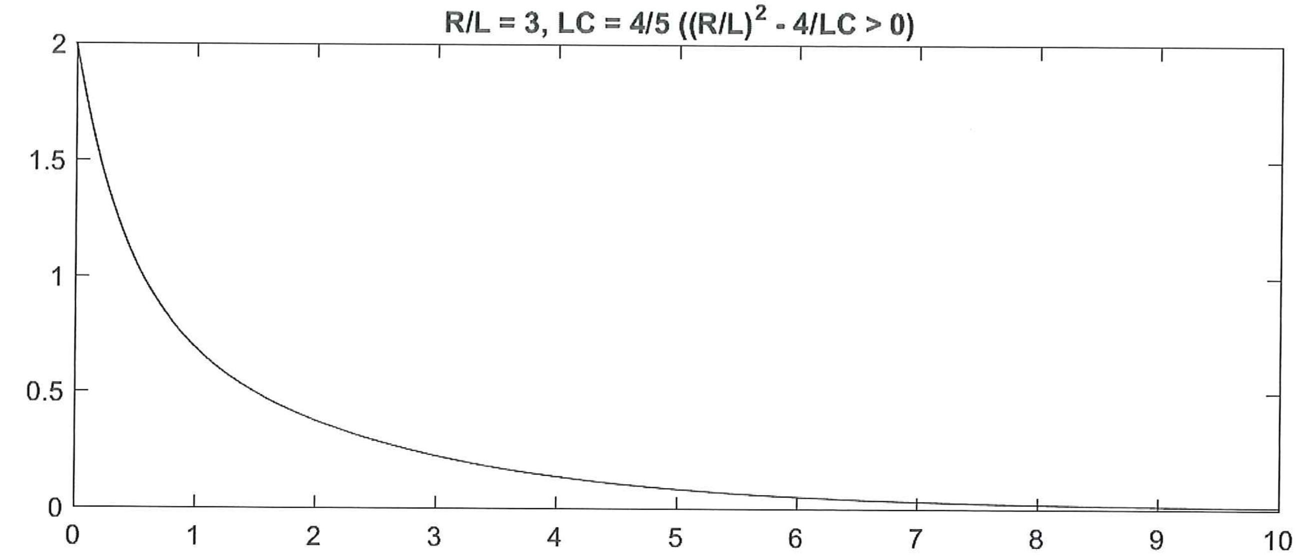
$C\cos(bt) + D\sin(bt)$

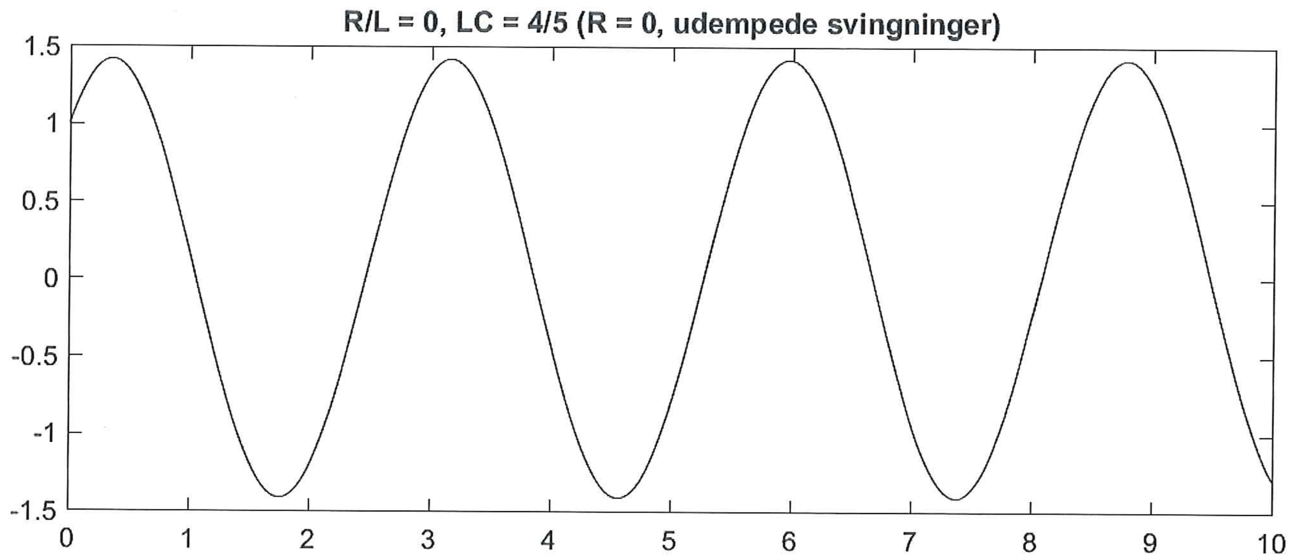


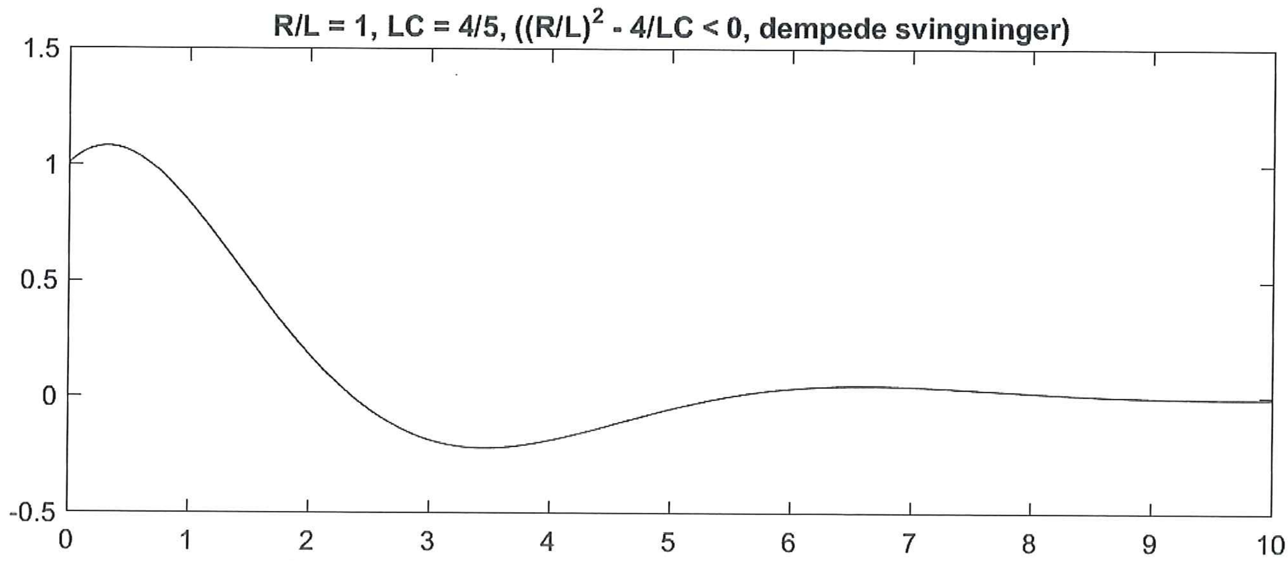
c) $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$

To komplekse røtter $-a \pm ib$: $e^{-at}\left(C\cos(bt) + D\sin(bt)\right)$




R/L = 3, LC = 4/5 ((R/L)^2 - 4/LC > 0)
2
1.5
1
0.5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


R/L = 0, LC = 4/5 (R = 0, udempede svingninger)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


R/L = 1, LC = 4/5, ((R/L)^2 - 4/LC < 0, dempede svingninger)
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Eksempel

$$y' - y = \cos x$$

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Generell løsning av $y' - y = 0$:

$y_H(x) = Ce^x$

Partikulær løsning av $y' - y = \cos x$

$$VS = y_P' - y_P$$

$$HS = \cos x$$

Kan vi bruke $y_P = \cos x$? Nei

Kan vi bruke $y_P = \sin x$? Nei

Hva med $y_P = A\cos x + B\sin x$?

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x$$

$$Vs = y_p' - y_p = -A\sin x + B\cos x$$
$$- (A\cos x + B\sin x)$$
$$= (B-A)\cos x + (-A-B)\sin x$$

$$Hs = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x$$

$Vs = Hs$:

$$B - A = 1$$
$$-A - B = 0$$

Legger sammen ligningene

$$\cancel{B} - A - A - \cancel{B} = 1 + 0$$
$$-2A = 1$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

$$-A - B = 0 \Rightarrow B = -A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = Ce^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x}$$

Andreordens lineære inhomogene differensialligninger med konstante koeffisienter (4.10)

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

$f(x) \neq 0$: Inhomogen.

Generell løsning (teorem 4.10.1):

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$y_H(x)$: Generell løsning av
$$y'' + py' + qy = 0$$
Kjent stoff

$y_p(x)$: Partikulær løsning av
$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Her ser vi på metoder for å bestemme $y_p(x)$.

Eksempel (lett?)

Finn generell løsning til

$$y'' + y' - 2y = 1$$

Oppgitt at $y_H(x) = Ce^x + De^{-2x}$.

Hva blir $y_p(x)$?

Vi ser etter $y_p(x) = K$:

$$VS = \underbrace{y_p'' + y_p'}_{=0} - 2\underbrace{y_p}_{K} = -2K$$

$$HS \qquad\qquad = 1$$

$$-2K = 1 \iff \underline{K = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\underline{y_p(x) = -\tfrac{1}{2}}$$

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$= \underline{Ce^x + De^{-2x} - \tfrac{1}{2}}$$

Eksempel

Finn partikulær løsning til

$$\underbrace{y'' + y' - 2y}_{VS} = \overbrace{1 \cdot x^2}^{HS} + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$$

2. grads-polynom

Ser etter $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$:

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p'(x) = 2A$$

$$VS = y_p'' + y_p' - 2y_p$$

$$= 2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C)$$

$$= \underbrace{-2A}_{\parallel} \cdot x^2 + (\underbrace{2A - 2B}_{\parallel})x + (\underbrace{2A + B - 2C}_{\parallel})$$

$$HS = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

$$-2A = 1 \Rightarrow \underline{A = -\tfrac{1}{2}}$$

$$2A - 2B = 0 \Rightarrow B = A = -\tfrac{1}{2}$$

$$2A + B - 2C = 0 \Rightarrow C = A + B/2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \underline{-\tfrac{3}{4}}$$

$$\underline{y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}}$$

Ubestemte koeffisienters metode

Inhomogen differensialligning:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

* Når $f(x)$ er polynom av grad n:

  Prøv med $y_p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

  og bestem $a_n, a_{n-1}, \dots$ ved innsetting.

* Når $f(x)$ er kombinasjon av $\cos(bx)$ og $\sin(bx)$:

  Prøv med $y_p(x) = A\cos(bx) + B\sin(bx)$

  og bestem A og B ved innsetting.

* Når $f(x) = e^{bx}$:

  Prøv med $y_p(x) = Ke^{bx}$ og bestem K ved innsetting.

Merk: Hvis $f(x) = e^x + \cos 2x$:

Prøv $y_p(x) = Ke^x + A\cos(2x) + B\sin(2x)$.

Eksempel (4.105)

Løs (finn generell løsning til)

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x .$$

Bestemmer først $y_H(x)$:

Karakteristisk ligning:

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm i \cdot 4}{2}$$

$$= \underline{\overset{=a}{1} \pm i \cdot \overset{=b}{2}} = a \pm ib$$

$$\underline{y_H(x) = e^x \left(C\cos(2x) + D\sin(2x) \right)}$$

Bestemmer $y_p(x)$:

$$Hs = \sin x \Rightarrow y_p(x) = A\cos x + B\sin x.$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

Setter inn i DL:

$$Vs = y_p'' - 2y_p' + 5y_p$$

$$= -A\cos x - B\sin x - 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x)$$

$$= (-A - 2B + 5A)\cos x + (-B + 2A + 5B)\sin x$$

$$= \underbrace{(4A - 2B)}_{=}\cdot\cos x + \underbrace{(2A + 4B)}_{=}\cdot\sin x$$

$$Hs = 0 \cdot \cos x \quad 1 \cdot \sin x$$

$$\underbrace{4A - 2B = 0}, \quad 2A + 4B = 1$$

$$2B = 4A \qquad B + 4B = 1$$

$$B = 2A \qquad 5B = 1$$

$$B = \frac{1}{5}$$

$$2A = B \Rightarrow A = \frac{1}{2}B = \frac{1}{10}$$

$$y_P(x) = \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$= e^x\left(C\cos(2x) + D\sin(2x)\right)$$

$$+ \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$