John Haugan

Matematikk for ingeniørstudenter:

Lineær algebra

Studieprogram Energi og miljø i bygg, 2015-2016

John Haugan

Matematikk for ingeniørstudenter:

Lineær algebra

Studieprogram Energi og miljø i bygg, 2015 - 2016

Høgskolen i Oslo og Akershus

1. utgave, 2007
2. utgave, 2007
3. utgave, 2008
4. utgave, 2009
5. utgave, 2014
6. utgave, 2015

Utgiver:

John Haugan
Røyseplassen 11
3033 Drammen

Telefon:

32 88 57 68
67 23 86 97

e-post:

john.haugan@ebnett.no
john.haugan@hioa.no

Matematikk for ingeniørstudenter:
Lineær algebra
ISBN 978-82-996392-6-2

Forord

Forord til første utgave
Denne boka har blitt til som et resultat av en forelesningsserie i matematikk ved Høgskolen i Oslo, avdeling for ingeniørutdanning.

Boka er skrevet for at studentene skal bli fortrolig med sentrale begreper og regneteknikker i lineær algebra. Anvendelsesaspektet er altså prioritert på bekostning av en streng matematisk framstilling. Bevis er utelatt siden vi har valgt å stole på at matematikerne har gjort denne jobben for oss. For de som ønsker en dypere forståelse av denne delen av matematikken, er det derfor nødvendig å supplere denne boka med lesning i andre bøker der bevis utgjør en sentral plass.

Denne første utgaven av boka inneholder ikke oppgaver.

Drammen, våren 2007

John Haugan

Forord til andre og tredje utgave
I andre og tredje utgave er noen av avsnittet skrevet litt om. Boka inneholder nå også et stikkordregister. Kjente feil er rettet.

Drammen, desember 2007, januar 2008

John Haugan

Forord til fjerde utgave
I fjerde utgave er kjente feil er rettet. I tillegg er en del av stoffet endret, noen nye avsnitt har kommet til, og noen avsnitt er flyttet.

Det er utarbeidet oppgaver til stoffet i boka. Disse er ikke tatt med som en del av boka, men er tilgjengelig på HiO-veven, eller kan fåes ved å henvende seg til forfatteren.

Drammen, januar 2009

John Haugan

Forord til femte utgave
Det er gjort flere endringer i denne utgaven.

- Kapitlet om egenverdier og egenvektorer er delt i to: Egenverdier og egenvektorer blir introdusert for å kunne løse systemer av differensiallikninger. Geometriske betraktninger og stoff om diagonalisering er lagt til et eget kapittel.
- Det er skrevet inn "MATLAB-tips" flere steder i boka.
- Kapitlet om problemløsing slik det var skrevet i forrige utgave, er tatt ut og gjengitt i boka *Matematikk for ingeniørstudenter: Kalkulus.*
- Flere avsnitt er skrevet om.

Oppgaver er forstatt ikke tatt med i boka siden studieopplegget i stor grad baserer seg på bruk av ukeoppgaver. Ekstra oppgaver er tilgjengelig på Fronter.

Drammen, desember 2014

John Haugan

Forord til sjette utgave
I denne utgaven er det tatt med noen flere MATLAB-tips. Noen avsnitt er merket med **Orienteringsstoff** ✓. Disse avsnittene vil ikke bli testet eksplisitt til eksamen. Ellers er det bare gjort en del mindre endringer fra forrige utgave.

Drammen, januar 2016

John Haugan

Innhold

Kapittel 1

Et innledende eksempel: Kirchhoffs lover

Grunnen til at vi bruker matematikk i ingeniørfag, er at vi skal kunne gjøre beregninger for å sjekke at konstuksjoner virker som de skal, at vi skal kunne dimensjonere riktig, osv. Utgangspunktet for matematikkbruken er innsikt i et ingeniørproblem, eller i naturlover. Her skal vi se på et eksempel der vi bruker kjente lover fra fysikken til å lage en matematisk modell.

Fra fysikken kjenner vi *Kirchhoffs lover*. Kirchhoffs første lov handler om hvordan elektrisk strøm fordeler seg når lederne har forgreininger. Loven forteller at elektrisk ladning er bevart.

Kirchhoffs andre lov forteller hvordan potensialfallene (spenning) endrer seg i en lukket krets. Loven forteller egentlig at energi er bevart.

Vi formulerer lovene slik:

1. Den algebraiske summen av strømmene inn på et forgreiningspunkt er lik null.
2. Den algebraiske summen av spenningene rundt en lukket krets er lik null.

Med "algebraisk" mener vi at vi regner med fortegn. Vi kan velge fortegnsregler selv, bare vi passer på å bruke dem konsekvent. I dette eksemplet bestemmer vi oss for å bruke disse fortegnsreglene:

- Strømmen er positiv *inn mot* et forgreiningspunkt, og negativ *ut fra* et forgreiningspunkt.
- Spenningen er positiv når vi går gjennom et batteri fra minus- til plusspolen.
- Spenningen er negativ når vi følger strømretningen gjennom en motstand.

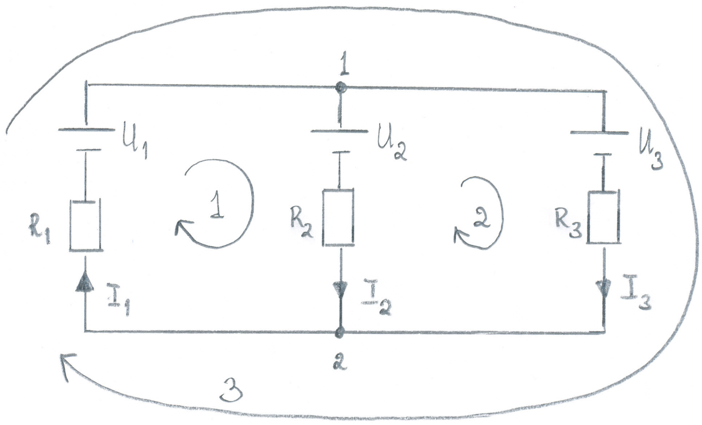
Vi går ut fra at vi kan bruke Ohms lov ($U = RI$) til å regne ut spenningen over en motstand.

Figur 1.1 viser en elektrisk krets. Den inneholder 3 batterier og 3 motstander. Vi ønsker å regne ut strømmene I_1, I_2 og I_3.

Figuren viser at det er tre lukkede delkretser, nummerert 1, 2 og 3 og med en pil rundt. Pilretningen viser hvilken vei vi velger å følge rundt kretsen når vi bruker Kirchhoffs andre lov. Kretsen har også to forgreiningspunkter, 1 og 2. Vi har satt pilretninger på den veien vi *tror* strømmen går. Får vi en negativ verdi til svar, betyr det at strømmen går i motsatt retning av det vi har tippet.

Vi antar at batteriene har spenninger $U_1 = 10\,V$, $U_2 = 20\,V$ og $U_3 = 30\,V$. Videre har motstandene resistanser $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ og $R_2 = 30\,\Omega$.

Når vi bruker Kirchhoffs andre lov på de lukkede kretsene, og Kirchhoffs første lov på knutepunktene, kan vi sette opp disse likningene:



Figur 1.1: Elektrisk krets med 3 batterier og 3 motstander.

Krets 1	$U_1 - U_2 - R_2I_2 - R_1I_1 = 0$
Krets 2	$U_2 - U_3 - R_3I_3 + R_2I_2 = 0$
Krets 3	$U_1 - U_3 - R_3I_3 - R_1I_1 = 0$
Forgreining 1	$I_1 - I_2 - I_3 = 0$
Forgreining 2	$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Hvis vi setter inn verdier for spenningene og resistansene, kan vi skrive likningssystemet slik:

$$
\begin{array}{lrrrcr}
1) & 10I_1 & +\,20I_2 & +\,0x_3 & = & -10 \\
2) & 0I_1 & +\,20I_2 & -\,30I_3 & = & 10 \\
3) & 10I_1 & +\,0I_2 & +\,30I_3 & = & -20 \\
4) & I_1 & -\,I_2 & -\,I_3 & = & 0 \\
5) & -I_1 & +\,I_2 & +\,I_3 & = & 0
\end{array}
$$

Det er ingen ting i veien for at vi kan løse dette likningssystemet ved å regne med blyant og papir. Det tar litt tid, og det er alltids en mulighet for at vi gjør en eller annen regnefeil. Seinere i denne boka skal vi se hvordan vi kan bruke MATLAB til å løse likningsystemet.

La oss først se nærmer på løsningen til likningssystemet. For å spare oss for regnearbeid, skal vi bruke kommandoen *solve* i MATLABs *Symbolic Toolbox* (MuPAD). Dersom vi prøver å løse de 5 likningene med hensyn på de tre ukjente strømmene, får vi denne løsningen:

$$I_1 = -\frac{7}{11}, \quad I_2 = -\frac{2}{11}, \quad I_3 = -\frac{5}{11}$$

Siden vi har valgt å bruke MuPAD til å løse likningssystemet, er det fort gjort å eksperimentere. Vi kan for eksempel plukke ut noen av de fem likningene, la MuPAD regne, og se hva vi får til svar da. Det viser seg for eksempel at vi får det samme svaret hvis vi løser to av likningene 1, 2 og 3, kombinert med én av likningene 4 og 5. Det kan derfor se ut som om vi ikke trenger alle de fem likningene for å regne ut strømmene!

Men: Dersom vi løser likningene 1, 2 og 3, får vi dette svaret:

$$I_1 = -3z - 2, \quad I_2 = \frac{3z}{2} + \frac{1}{2}, \quad I_3 = z$$

Dersom vi løser likningene 1, 4 og 5, blir svaret:

$$I_1 = \frac{2z}{3} - \frac{1}{3}, \quad I_2 = -\frac{z}{3} - \frac{1}{3}, \quad I_3 = z$$

I disse to uttrykkene er z en *parameter* som vi fritt kan velge en verdi for. Det betyr at vi i praksis har uendelig mange løsninger av likningssystemene (1, 2, 3) og (1, 4, 5). Det stemmer dårlig med det vi vet om elektriske kretser.

Hvis vi taster inn en feil i likning 1, og skriver 10 i stedet for -10 på høyre side av likhetstegnet, gir MuPAD svaret:

$$\emptyset$$

det vil si den tomme mengden. Det betyr at likningssystemet ikke har noen løsning. Det virker uholdbart siden vi jo kan koble opp kretsen og måle at det faktisk går strømmer.

Disse eksemplene illustrerer at når vi skal løse et likningssystem, må vi være forberedt på at et av disse tre tilfellene kan inntreffe:

1. Likningssystemet har én løsning.
2. Likningssystemet har uendelig mange løsninger.
3. Likningssystemet har ingen løsninger.

Hvorfor er det slik? Det er blant annet dette spørsmålet du vil få svar på i denne boka.

Kapittel 2

Lineære likningssystemer

At en likning eller et likningssystem er **lineært**, betyr at de ukjente bare forekommer i første potens i likningene. De inngår ikke i uttrykk som x^2, $x + \frac{1}{x}$, xy, $\sin x$, e^x, $\sqrt{x}$ eller liknende. Likningen

$$\sqrt{3}\,x_1 + x_2 = 4$$

er et eksempel på en lineær likning. Likningssystemet

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\,x_1x_2 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

er et eksempel på et ikke-lineært likningssystem på grunn av at det inneholder produktet x_1x_2.

2.1 Å løse lineære likningssystemer

I dette kapitlet skal vi lære teknikker som gjør oss i stand til å løse lineære likningssystemer, for eksempel de systemene vi får når vi bruker Kirchhoffs lover til å beregne strømmer og spenninger i elektriske kretser.

Å løse et likningssystem vil si å bestemme de verdiene av de ukjente som gjør at alle likningene er oppfyllt samtidig - dersom det er mulig.

2.1.1 "Formen" på et likningssystem avgjør hvor lett det er å løse det

Nedenfor har vi skrevet opp tre likningssystemer som alle har løsning $x = 4$, $y = 3$.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ x - 3y &= -5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ y &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + 0\,y &= 4 \\ 0\,x + y &= 3 \end{aligned}$$

Likningssystemet lengst til høyre er lettest å løse. Vi kan se hva x og y er med en gang.

Likningssystemet i midten er ikke så veldig mye vanskeligere. Fra den nederste likningen ser vi at $y = 3$. Derfor setter vi $y = 3$ inn i likningen over. Da får vi en likning som bare inneholder x, og den greier vi fint å løse.

Likningssystemet til venstre er det vanskeligste. Her må vi bruke en eller annen teknikk for å regne ut verdien av de to ukjente.

I dette avsnittet skal vi lære teknikker som gjør oss i stand til å overføre likningssystemet fra formen det har til venstre, via den midterste formen, for så å havne opp med den enkle formen helt til høyre. Teknikkene kalles **Gauss-eliminasjon** og **Gauss-Jordan-eliminasjon**.

2.1.2 Likningssystemer med 2, 3 eller flere ukjente

Når vi løser én likning med én ukjent, kan vi komme fram til tre forskjellige situasjoner. Disse kan illustreres slik:

1. $2x = 8$
2. $0\,x = 8$
3. $0\,x = 0$

Vi ser:

* I tilfelle 1 finner vi én løsning, $x = 4$.
* I tilfelle 2 finner vi ingen løsning, fordi det ikke fins noe tall som multiplisert med 0, gir 8.
* I tilfelle 3 er likningen oppfylt for alle verdier av x fordi $0 \cdot x$ *alltid* gir null. Vi skriver denne løsningen som $x = t$, der t er en **parameter**. Parameteren er en størrelse vi kan *velge* fritt.

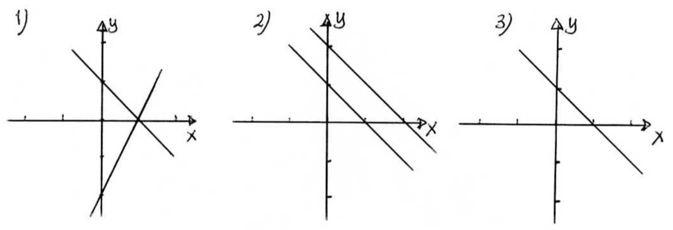
De tre situasjonene 1 - 3 viser eksempler på at vi kan få én, ingen eller uendelig mange løsninger når vi løser likninger. Også når vi løser et lineært *likningssystem* er det alltid bare er tre muligheter.

Setning 2.1

Når vi løser et lineært likningssystem, får vi tre mulige resultater:

1. Det er nøyaktig én løsning.
2. Det er ingen løsning.
3. Det er uendelig mange løsninger.

Et likningssystem som har minst én løsning kaller vi **konsistent**. Dersom likningssystemet ikke har noen løsning, sier vi at det er **inkonsistent**.



Figur 2.1: I figur 1) har vi én løsning (skjæringspunktet), i figur 2) er det ingen løsninger (linjene skjærer ikke hverandre) og i figur 3) er det uendelig mange løsninger (linjene faller sammen).

To likninger med to ukjente

Dersom vi har to likninger med to ukjente, kan vi løse likningssystemet grafisk. Vi omformer da likningene og framstiller y'ene som funksjon av x: $y = ax + b$. Vi får da følgende grafiske tolkning av de tre muligheten over, se figur 2.1.

1. Vi får *én løsning* når de to grafene skjærer hverandre i ett punkt.

   Dette svarer for eksempel til likningene:

   $$x + y = 1, \quad 2x - y = 2$$

   Grafene til $y = -x + 1$ og $y = 2x - 2$ skjærer hverandre i ett punkt, punktet (1, 0). Likningssystemet har løsning $x = 1,\ y = 0$.

2. Vi får *ingen løsninger* når de to grafene er parallelle, det vil si når de ikke skjærer hverandre.

   Dette svarer for eksempel til likningene:

   $$x + y = 1, \quad x + y = 2$$

   Grafene til $y = -x+1$ og $y = -x+2$ skjærer y-aksen i forskjellige punkter, (0, 1) og (0, 2). Siden de har samme stigningstall, -1, er de parallelle og vil ikke skjære hverandre. Dessuten ser vi at summen $x + y$ ikke kan være både 1 og 2 samtidig.

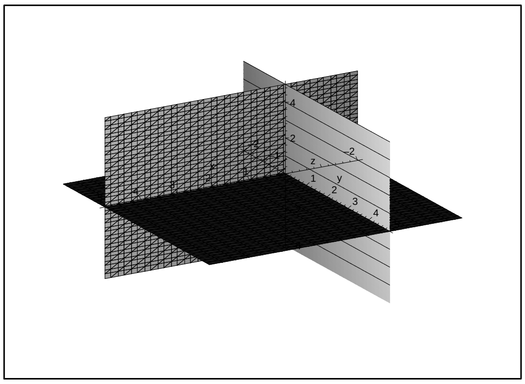
3. Vi får *uendelig mange løsninger* når de to grafene faller sammen. Når linjene faller sammen, kan vi si at de skjærer hverandre i uendelig mange punkter.

   Dette svarer for eksempel til likningene:

   $$x + y = 1, \quad 2x + 2y = 2$$

   Her er begge likningene like. Det ser vi ved å dividere den andre likningen i alle ledd med 2. Begge likningene kan skrives på formen $y = -x + 1$. De to linjene faller sammen, og alle punktene på linja er løsning.

Når de to grafene faller sammen, og vi har uendelig mange løsninger, kan vi *velge* en verdi for den ene ukjente, og så regne ut hva den andre er. Vi kan gjøre uendelig mange valg av den ene variable, men for hvert valg vi gjør, er det bare én mulig verdi av den andre variable. Vi sier at vi har en **fri variabel**.



Figur 2.2: Tre plan som skjærer hverandre i ett punkt. Likningssystemet har nøyaktig èn løsning.

Vi skriver vanligvis løsningen på likningssystemet ved å innføre en **parameter** t. Da kaller vi den ukjente vi velger t og uttrykker den andre ukjente ved hjelp av t:

$$y = t, \quad x = 1 - t$$

Når vi innfører en fri variabel og skriver $y = t$, er dette for å fortelle at vi kan velge y fritt. En parameter er altså en variabel størrelse som vi kan tildele en verdi ved en bestemt bruk.

Tre likninger med tre ukjente

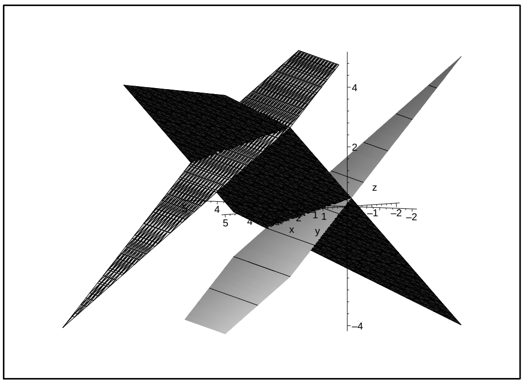
Et eksempel på et likningssystem med tre likninger og tre ukjente er dette:

$$\begin{array}{rrrrr} x & +\,y & -\,z & = & 0 \\ x & +\,2y & +\,3z & = & 1 \\ 2x & -\,3y & +\,z & = & -2 \end{array}$$

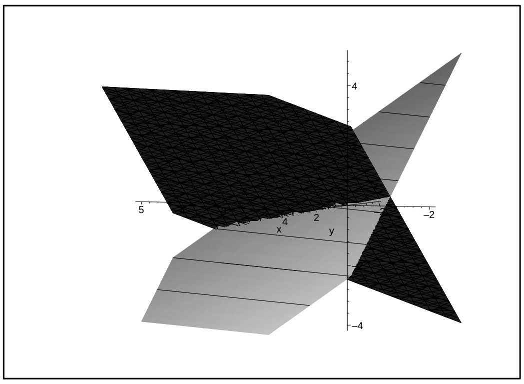
Akkurat som for likningssystemer med to likninger og to ukjente, har de forskjellige mulighetene vi har for et likningssystem med tre likninger med tre ukjente en geometrisk tolkning. Likningen:

$$Ax + By + Cz = D$$

framstiller et plan i rommet. Hver av de tre likningene i likningsystemet over, er altså likningen for et plan i rommet. Dersom disse planene bare har ett punkt felles (for eksempel hjørnet i et rom der planene er to vegger og gulvet), har likningssystemet bare én løsning. Dette er illustrert i figur 2.2. Er minst to av de tre planene parallelle, har vi ingen løsninger, se figur 2.3. Faller minst to av planene sammen, har vi uendelig mange løsninger, se figur 2.4.



Figur 2.3: To parallelle plan gir ingen løsning av likningssytemet.



Figur 2.4: To plan faller sammen. Alle punktene langs skjæringslinja passer i alle likningene. Vi får uendelig mange løsninger.

Litt om likningen for et plan

At likningen $x + y + z = 1$ framstiller et plan i rommet, kan vi få en antydning om ved å sette $z = -x - y + 1$. For hvert tallpar $(x,\ y)$ i planet kan vi regne ut en z-verdi. Framstiller vi punktene $(x,\ y,\ z)$ grafisk, får vi en rekke punkter i rommet som til sammen utgjør et plan. Dette er selvsagt ikke noe bevis for at likningen $x + y + z = 1$ framstiller et plan, men gir oss i alle fall en indikasjon på at vi er på sporet.

Vi kan bevise at alle plan kan skrives på formen $Ax + By + Cz = D$. For å gjøre det, lar vi $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ være et kjent punkt i planet, og $\vec{n} = [n_1,\ n_2,\ n_3]$ en normalvektor til planet. Hvis $P(x, y, z)$ er et vilkårlig punkt i planet, vil vektoren $\vec{r} = [x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0]$ ligge i planet, og derfor stå vinkelrett på $\vec{n}$. Derfor er $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. Da vil uttrykket:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \vec{n} = [x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0] \cdot [n_1,\ n_2,\ n_3] = 0 \\
(n_1 x - n_1 x_0) + (n_2 y - n_2 y_0) + (n_3 z - n_3 z_0) = 0 \\
n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0 = D
\end{aligned}
$$

gi oss en likning på formen $Ax + By + Cz = D$.

Likningssystemer med mer enn 3 ukjente

Dersom vi har har fire likninger med fire ukjente, har vi ingen mulighet til å se dette for oss, eller lage tegninger, siden vi ikke har erfaringer med 4-dimensjonale rom. Men matematisk kan vi forestille oss dette som "hyperplan" som skjærer hverandre, er parallelle eller som er sammenfallende. Det samme gjelder likningssystemer med mer enn fire ukjente.

2.1.3 Eliminasjonsmetoden. Radoperasjoner brukt på likningssystemer.

Vi kan bruke en metode som vi kaller **eliminasjonsmetoden** (se nedenfor) når vi løser likningssystemer. Ideen med denne metoden er at vi først skal omforme likningssystemet slik at det blir skrevet på det vi kaller **trappeform**. Likningssystemet nedenfor er skrevet på trappeform:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 1 \\ 5y - 4z &= 5 \\ 2z &= 7 \end{aligned}$$

Betegnelsen *trappeform* kommer av at venstre side av likningen har form som en "trapp". Vi sier også at likningssystemet har **triangulær form** fordi venstre side har form som en trekant.

Når likningssystemet er overført til trappeform, kan vi bruke den nederste likningen til å regne ut den ene ukjente. Så setter vi denne verdien inn i likningen over, og arbeider oss oppover i likningssystemet. Anvender vi framgangsmåten på likningssystemet over, får vi:

1. Vi løser den nederste likningen med hensyn på z og får $z = \frac{7}{2}$.

2. Vi setter denne z-verdien inn i den midterste likningen og får $5y - 4 \cdot \frac{7}{2} = 5$ som gir $y = \frac{19}{5}$.

3. Vi setter y og z-verdiene inn i den øverste likningen. Så løser vi denne likningen med hensyn på x. Vi får $x = -\frac{171}{40}$

Løsningen til likningssystemet er altså

$$x = -\frac{171}{40}, \quad y = \frac{19}{5}, \quad z = \frac{7}{2}$$

Prosessen vi gjør når vi starter med den nederste likningen og jobber oss oppover for å regne ut de variable, kaller vi **tilbakesubstitusjon**.

Vanligvis er ikke likningssystemer opprinnelig skrevet på trappeform. For å omforme det opprinnelige likningssystemet til trappeform, bruker vi tre **elementære radoperasjoner** på systemet:

Setning 2.2

Løsningen til likningssystemet er den samme etter at vi har utført én eller flere elementære radoperasjoner. De elementære radoperasjonene er:

1. Vi kan multiplisere alle ledd i en likning med et tall forskjellig fra null.
2. Vi kan bytte om rekkefølgen av likningene.
3. Vi kan legge et multiplum av en likning til en annen likning i systemet.

I denne boka skal vi bruke en forkortet skrivemåte for å vise hva vi gjør når vi legger sammen rader, når vi bytter om rader, og når vi multipliserer en rad med et tall:

* Skrivemåten $3R_2 \to R_2$ vil vi skal bety at vi multipliserer rad 2 (R_2) med tallet 3, og lar resulatet stå i rad 2.
* Skrivemåten $R_1 \rightleftarrows R_2$ vil vi skal bety at vi bytter om red 1 og rad 2.
* Skrivemåten $(-1)R_1 + R_3 \to R_3$ betyr at vi multipliserer rad 1 (R_1) med -1 og legger det vi da får til rad 3 (R_3). Resultatet setter vi i rad 3.

Vi kan illusterer de tre radoperasjonene anvendt på likningssystemet 2.1.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

1. *Multiplikasjon av en likning med et tall.*
   Vi multipliserer rad 2 (R_2) med -4 og setter resultatet inn i rad 2, det vil si $-4R_2 \to R_2$

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ -4x + 4y &= -8 \end{aligned}$$

2. *Bytte om rekkefølgen av likninger*
   Vi skriver likningene i motstatt rekkefølge, $R_1 \rightleftarrows R_2$:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

3. *Multiplikasjon med tall, og summering*
   Vi multipliserer rad 2 med 2, og legger det vi da får til rad 1. Dette skriver vi i to steg nedenfor, men gjør det vanligvis i ett steg. De to stegene kan skrives slik:

   (a) $2R_2 \to R_2$

(b) $R_1 + R_2 \to R_1$

Slår vi disse to stegene sammen til ett, skriver vi $R_1 + 2R_2 \to R_1$. Når vi skriver likningssystemet ser dette slik ut:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 0y &= 5 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

Når vi bruker **eliminasjonsmetoden** til å løse lineære likningssystemer er hensikten altså å gjennomføre elementære radoperasjoner slik at vi finner de verdiene som oppfyller alle likningene samtidig.

Målet med eliminasjonsmetoden er å utføre én eller flere radoperasjoner slik at én av likningene bare inneholder én ukjent - hvis det er mulig å få til det.

Når vi bruker elementære radoperasjoner, lønner det seg å gjøre radoperasjonene i en bestemt rekkefølge. Dersom en stjerne (*) markerer et av leddene i en rad, for eksempel $4x$, bør 0'ene dukke opp i den rekkefølgen vi ser her dersom vi har 3 likninger med 3 ukjente:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & =* \\ * & * & * & =* \\ * & * & * & =* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & * & =* \\ * & * & * & =* \\ 0 & * & * & =* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & * & =* \\ 0 & * & * & =* \\ 0 & * & * & =* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & * & =* \\ 0 & * & * & =* \\ 0 & 0 & * & =* \end{bmatrix}$$

Denne "figuren" viser bare skjematisk hva som foregår. Vi har for eksempel ikke tatt hensyn til at det er mulig å bytte om to rader.

Hvis det er *flere ukjente enn likninger*, innfører vi parametre for å beskrive løsningene. Dersom likningssystemet er $x + y = 4$ (én likning med to ukjente), ser vi at $x = 4 - y$. Vi innfører parameteren $y = t$. Vi husker at en **parameter** er en uavhengig variabel, det vil si en størrelse som kan variere fritt. Når vi innfører t som parameter får likningssystemet løsningen:

$$y = t, \quad x = 4 - t$$

Vi kan velge verdien av t fritt, slik at likningssystemet får uendelig mange løsninger. Er for eksempel $t = 2$, blir $y = 2$ og $x = 4 - 2 = 2$.

▼

Eksempel 2.1

Løs likningssystemet:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

Løsning

Vi bruker eliminasjonsmetoden. Da skal vi først overføre likningssystemet til trappeform, det vil si at det skal ha denne strukturen:

$$\begin{aligned} * + * &= * \\ 0 + * &= * \end{aligned}$$

Framgangsmåten når vi bruker elementære radoperasjoner er:

1. Multipliser rad 1 med -2, og legg dette til rad 2, $(-2)R_1 + R_2 \to R_2$.

   $$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

   Legg merke til at vi ikke skriver opp hva vi får når vi multipliserer den første raden med -2. Dette er bare en "hjelperegning" vi utfører for å bli kvitt en av de ukjente i den siste raden.

2. Bruk den "nye" rad 2 til å regne ut y.

   $$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

3. Sett verdien av y inn i rad 1.

   $$\begin{aligned} x + 0 &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

4. Bruk rad 1 til å regne ut x.

   $$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Svaret blir

$$x = 1, \quad y = 0$$

Geometrisk betyr dette at grafene til de de likningene $x + y = 1$ og $2x - y = 2$ skjærer hverandre i punktet (1, 0). Dette er det eneste fellespunktet de to grafene har.

■

▼

Eksempel 2.2

Løs likningssystemet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

Løsning

Vi løser likningssystemet ved å bruke eliminasjonsmetoden. Først overfører vi systemet til triangulær form, deretter "regner vi oss oppover" i systemet for å finne de ukjente. Vi gjennomfører altså **tilbakesubstitusjon** for å regne ut de ukjente. For å løse dette likningssytemet, utfører vi disse operasjonene:

1. $-1R_1 + R_3 \to R_3$. Resultatet blir den "nye" rad 3
2. $-2R_1 + R_2 \to R_2$. Resultatet blir den "nye" rad 2

Da vil likningssystemet ha fått denne formen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 && (1) \\ -3y - z &= 0 && (2) \\ -2z &= 2 && (3) \end{aligned}$$

Nå kan vi regne ut de ukjente ved å regne oss tilbake oppover i likningssystemet fra likning 3:

1. Vi finner først $z = -1$ fra likning 3.
2. Vi setter $z = -1$ inn i likning 2, og får $y = \frac{1}{3}$.
3. Så setter vi vediene for z og y inn i likning 1 og får $x = \frac{5}{3}$.

Løsningen er altså:

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = -1$$

Geometrisk betyr dette at de tre planene $x + y + z = 1$, $2x - y + z = 2$ og $x + y - z = 3$ skjærer hverandre i ett punkt. Det er punktet $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$. Figur 2.5 viser de tre planene og skjæringspunktet.

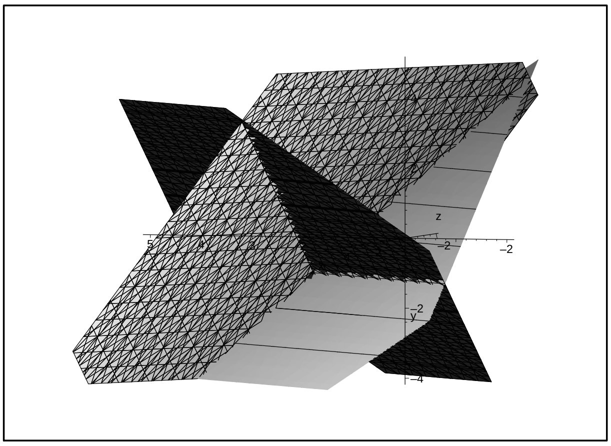
■

▼

Eksempel 2.3

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x \quad +2y \quad -z \quad &= 0 \\ 2z \quad &= 6 \end{aligned}$$



Figur 2.5: De tre planene $x+y+z=1$, $2x-y+z=2$ og $x+y-z=3$ skjærer hverandre i ett punkt. Koordinatene til dette punktet er de eneste x, y og z-verdiene som passer inn i alle de tre likningene i likningssystemet $\{x+y+z=1,\ 2x-y+z=2,\ x+y-z=3\}$.

Løsning

I dette likningssystemet er det 3 ukjente, men bare to likninger. Da er det vanligvis slik at vi ikke klarer å finne én bestemt løsning. I disse situasjonene må vi som oftest innføre en parameter for å skrive opp løsningen. Vi går fram på denne måten:

Likning 2 gir oss $z=3$. Dette setter vi inn i likning 1. Da får vi:

$$x+2y-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2y=3$$

Siden vi har én likning, men to ukjente, kan vi velge den ene fritt. Vi kan for eksempel sette $y=t$. Da blir $x=-2y+3=-2t+3$. Likningssystemet har altså denne løsningen:

$$x=-2t+3, \quad y=t, \quad z=3$$

Geometrisk betyr dette at de to planene $x+2y-x=0$ og $2z=6 \Leftrightarrow z=3$ skjærer hverandre langs en rett linje. Denne linja er bestemt ved parameterframstillingen $x=-2t+3, \quad y=t, \quad z=3$. De to planene og skjæringslinja mellom dem er vist i figur 2.6. Alle punktene som ligger på skjæringslinja passer inn i likningssytemet.

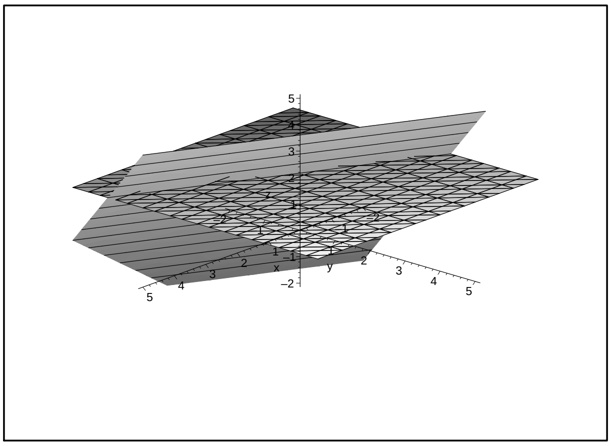
■

▼

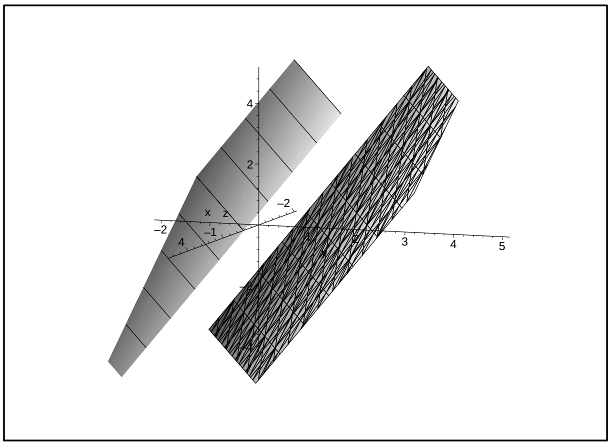
Eksempel 2.4

Løs likningssystemet

$$\begin{array}{llll} x & -2y & +z & =3 \\ 2x & -4y & +2z & =-5 \end{array}$$



Figur 2.6: De to planene $x + 2y - x = 0$ og $2z = 6$ skjærer hverandre langs en rett linje. Alle punktene på linja passer inn i likningssystemet $\{x + 2y - x = 0, \;\; 2z = 6\}$.



Figur 2.7: De to planene $x - 2y + z = 3$ og $2x - 4y + 2z = -5$ er parallelle. Derfor har ikke likningssystemet $\{x - 2y + z = 3, \; 2x - 4y + 2z = -5\}$ noen løsning.

Løsning

For å løse dette likningssytemet, utfører vi radoperasjonen $-2R_1 + R_2 \to R_2$. Resultatet blir den "nye" rad 2. Vi ser at likningssystemet får denne formen:

$$\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = 3 \\ 0x & +0y & +0z & = -11 \end{array}$$

Av den siste likningen ser vi at likningssystemet ikke har noen løsning siden det ikke går an å finne verdier av x, y og z som gjør at $0x + 0y + 0z$ blir lik -11. Geometrisk betyr dette at de to likningene framstiller to parallelle plan. De to planen har ingen punkter felles. Vi har vist dette i figur 2.7.

■

I eksempel 2.4 hadde vi et tilfelle der likningssystemet ikke hadde noen løsning. Da var alle koeffisientene foran de ukjente lik null, mens det ikke stod null på høyre side av likhetstegnet. Generelt gjelder:

Setning 2.3

Hvis minst én av likningene i et likningssystem har formen

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

der $b \neq 0$, har ikke likningssystemet noen løsning.
Hvis ingen av likningene i likningssystemet har denne formen, har systemet enten én eller uendelig mange løsninger.

Den metoden vi har brukt for å komme fram til et likningssystem som er skrevet på triangulær form, kaller vi **Gausseliminasjon**. Vi skal se mer på denne metoden i avsnitt 2.2.

2.1.4 Å løse lineære likningssystemer med MATLAB

MATLAB-tips 2.1

MATLAB har innebygde funksjoner for å løse lineære likningssystemer. Hvis vi skal løse likningssystemet:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

kan vi gå fram slik:

I Command Window i MATLAB skriver vi inn koeffisientene (tallene) som står foran x og y i en *matrise* (en slags tabell, se avsnitt 2.2) og kaller matrisen A. Vi skriver først inn tallene i første likning, deretter tallene i andre likning. For å fortelle MATLAB at vi er ferdig med en likning, skriver vi et semikolon når vi har skrevet inn alle koeffisientene i likningen. Det hele skriver vi mellom to hakeparenteser: [ ]. Dette ser slik ut:

```
>> A = [ 1 1 ; 2 -1 ]
```

MATLAB svarer med å skrive ut A:

```
A =

     1     1
     2    -1
```

Deretter skriver vi inn det som står på høyre side i likningen som en *vektor* (en slags tabell, det også, se avsnitt 2.2) og kaller vektoren b. Dette ser slik ut:

```
>> b = [ 1 ; 2 ]
```

MATLAB svarer med å skrive ut b:

```
b =

     1
     2
```

Nå "vet" MATLAB hvordan likningssystemet ser ut. Da kan vi bruke kommandoen *linsolve* for å løse likningssystemet. Dette ser slik ut:

```
>> linsolve(A,b)

ans =

     1
     0
```

Løsningen til likningssystemet skriver MATLAB etter " ans = ". Løsningen er alstå $x = 1, \quad y = 0$.

▼

Eksempel 2.5

Løs likningssystemet i eksempel 2.2 ved å bruke MATLAB.

Løsning

Likningssystemet er:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

For å "fortelle" MATLAB hvordan likningssystemet ser ut, må vi skrive inn koeffisientene (tallene) foran x, y og z, rad for rad, ovenfra og nedover. Derette skriver vi inn tallene som står på høyre side av likhetstegnet, også de ovenfra og nedover.

Vi skriver inn denne sekvensen i Command Window i MATLAB:

```
>> clear all
>> A=[ 1 1 1 ; 2 -1 1 ; 1 1 -1 ]

A =

     1     1     1
     2    -1     1
     1     1    -1

>> b = [ 1 ; 2 ; 3 ]

b =
```

```
     1
     2
     3

>> linsolve(A,b)

ans =

    1.6667
    0.3333
   -1.0000
```

I motsetning til i eksempel 2.2 gir MATLAB oss desimaltall til svar. Men vi ser at svarene er de samme:

$$x = \frac{5}{3} \approx 1.6667 \qquad y = x = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \qquad z = -1 \approx 1.0000$$

■

▼

Eksempel 2.6

a. Løs likningsystemet i eksempel 2.3 ved å bruke MATLAB.

b. Løs likningsystemet i eksempel 2.4 ved å bruke MATLAB.

Løsning

a. Likningssystemet i eksempel 2.3 er:

$$\begin{aligned} x \quad + 2y \quad - z \quad &= 0 \\ 2z \quad &= 6 \end{aligned}$$

Vi skriver inn koeffisientene foran de ukjente i matrisen A og tallene til høyre for likhetstegnet i matrisen b. Vi får:

```
>> clear all
>> A=[ 1 2 -1; 0 0 2 ]

A =

     1     2    -1
     0     0     2

>> b=[ 0 ; 6 ]
```

```
b =

     0
     6

>> linsolve(A,b)

ans =

         0
    1.5000
    3.0000
```

I dette likningssystemet har vi to likninger og tre ukjente. Systemet er ubestemt, det vil si at vi har en fri variabel. De som har lagd MATLAB løser dette ved å la én av de tre ukjente være lik null, og så regne ut de to andre. Vi ser at MATLAB's svar

$$x = 0 \quad y = 1.5000 \quad z = 3.0000$$

passer inn i likningssystemet.

Dersom vi hadde hatt for eksempel åtte ukjente og fem likninger, ville MATLAB ha prøvd å sette tre av de ukjente lik null, og deretter prøvd å løse likningssettet vi da får. For eksempel gir MATLAB svaret

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$$

når vi løser likningssystemet:

$$x + 2y + 3z = 3$$

Vi skjønner av dette at vi må se nøye på hvor mange likninger og hvor mange ukjente vi har når vi bruker "linsolve"-funksjonen sånn at vi kan tolke svaret korrekt. Løsningen som MATLAB ga i dette eksemplet er jo bare én av uendelig mange.

b. Likningssystemet i eksempel 2.4 er:

$$\begin{array}{cccc} x & -2y & +z & = 3 \\ 2x & -4y & +2z & = -5 \end{array}$$

Vi skriver inn koeffisientene foran de ukjente i matrisen A og tallene til høyre for likhetstegnet i matrisen b. Vi får:

```
>> clear all
>> A=[ 1 -2 1 ; 2 -4 2 ]

A =
```

```
     1    -2     1
     2    -4     2

>> b=[ 3 ; -5 ]

b =

     3
    -5

>> linsolve(A,b)
Warning: Rank deficient, rank = 1, tol =  1.404333e-15.

ans =

         0
    0.7000
         0
```

Her gir MATLAB oss beskjed om at noe kan være galt ved å skrive "Warning:". I eksempel 2.4 så vi at de to likningene grafisk framstilte hvert sitt plan, og at de to planene var parallelle. Det betyr at vi ikke kan regne ut noen løsning til likningssystemet.

MATLAB gir også en forklarende tekst. Vi skal ikke gå mer inn på hva denne betyr, men slå fast at når varsler dukker opp, må vi være påpasselige og gå tilbake å se nærmere på hva som kan være galt.

■

▼

Eksempel 2.7

Noen ganger kan vi komme i situasjoner der det er flere likninger enn ukjente. Undersøk hvilket svar MATLAB gir når du prøver å løse likningssystemet

$$
\begin{array}{rrcr}
x & -\,y & = & 3 \\
2x & +\,y & = & 4 \\
x & +\,2y & = & -1 \\
-2x & +\,y & = & 0
\end{array}
$$

Løsning

Vi skriver inn matrisen A og vektoren b i Command Window, og får:

```
>> clear all
>> A=[ 1 -1 ; 2 1 ; 1 2 ; -2 1 ]

A =

     1    -1
     2     1
     1     2
    -2     1

>> b=[ 3 ; 4 ; -1 ; 0 ]

b =

     3
     4
    -1
     0

>> linsolve(A,b)

ans =

    1.0290
   -0.2899
```

Hvis vi setter $x = 1.0290$ og $y = -0.2899$ inn i likningene, ser vi at dette ikke stemmer. Første likning gir for eksempel

$$x - y = 1.0298 - (-0.2899) = 1.3197 \neq 3$$

Det MATLAB har gjort her, er å regne ut de verdiene av x og y som ”passer best” til *alle* de fire likningene. Hva det vi si å ”passe best”, og hva slags beregninger som blir gjort, skal vi komme tilbake til i et senere matematikkemne.

Sagt litt upresist: Har du flere likninger enn ukjente, vil MATLAB gi deg et svar som kanskje er noe annet enn det du tror det er.

■

2.2 Gausseliminasjon på totalmatrisen

Vi kan ordne koeffisientene i et likningssystem i en ”tabell” av tall. Tar vi utgangspunkt i likningssystemet i eksempel 2.2, kan vi skrive koeffisientene slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Når tallene "kommer fra" et likningssystem slik som her, kaller vi tabellen en **koeffisientmatrise**. Hvis tallene i en slik tabell ikke har noe med et likningssystem å gjøre, sier vi bare **matrise**.

I dette avsnittet skal vi se nærmere på matriser og likningssystemer. I stedet for å skrive opp likningssystemet, skal vi nå lære å løse likningssystemer ved å arbeide med matriser. Vi skal se at teknikkene med elementære radoperasjoner kommer til nytte nå også.

2.2.1 Koeffisientmatrisen til et likningssystem

Matrisen som framkommer når vi skriver opp koeffisientene foran x, y og z i likningssystemet:

$$\begin{aligned} x \quad + 2y - 2z &= 4 \\ 4x - y \quad + 3x &= 3 \\ 6x \qquad\quad - 2z &= -2 \end{aligned}$$

i en matrise, kaller vi **koeffisientmatrisen** til likningssystemet. Den skriver vi slik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi har skrevet opp koeffisientene foran x, y og z som en "tabell" av tall. Det er altså denne "tabellen" av tall vi kaller en **matrise**. Legg merke til at vi skriver hakeparenteser [ ] rundt tabellen av tall. (I andre lærebøker kan det hende at det er brukt vanlige parenteser - det er ingen klare regler om dette.)

I stedet for å kalle de ukjente x, y og z, kan vi bruke indekser. Det gjør det lettere når vi har mange ukjente. Har vi n ukjente skriver vi $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_n$.

En matrise består av **rader** (også kalt **rekker** eller **linjer**) og **søyler** (også kalt **kolonner**). En matrise som har 4 rader og 2 søyler, sier vi er en 4×2-matrise. Vi nevner antall rader først, og deretter antall søyler. Matrisen A nedenfor har 3 rader og 3 søyler, mens matrisen B har 3 rader og 2 søyler. Matrisen A er en 3×3-matrise, mens matrisen B er en 3×2-matrise.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & \pi \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dersom det er like mange rader og søyler i en matrise, sier vi at matrisen er **kvadratisk**. Tallene i matrisen kaller vi **matriseelementer**.

Når vi setter "navn" på matriser, blir det brukt forskjellige skrivemåter. Noen ganger bruker man rett, halvfet skrift: **A**. I denne boka vil vi bruke kursiv, ikke-fet skrift: A. Når vi skriver for hånd, er det flere muligheter, for eksempel ved å skrive en dobbeltstrek på venstre side av bokstaven, skrive en strek under bokstaven eller skrive en vanlig bokstav uten å bruke spesielle tegn. Bruker vi ikke spesielle tegn, må det gå fram av sammenhengen at symbolet står for en matrise.

Kompakt kan vi skrive matrisen A slik:

$$A = [\, a_{i,j} \,]$$

Tallene $a_{i,j}$ er *matriseelementene* i matrisen. Matriseelementet $a_{i,j}$ står i rad nummer i og og søyle nummer j. Vi teller rader fra toppen og søyler fra venstre. Vi ser at $a_{2,3} = 3$, mens $a_{3,2} = 0$ i matrisen A over. Vi ser også at $b_{1,1} = 0$ og $b_{2,2} = \pi$

Det er også mulig å skrive matriseelementene *uten* komma mellom indeksene. En matrise kan da skrives kompakt på denne måten:

$$A = [\, a_{ij} \,]$$

En $n \times 1$-matrise, det vil si en matrise med n rader og 1 søyle, kaller vi en **søylevektor**. Vektoren $\vec{x}$ skriver vi på en av disse to måtene:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$$

Du er sikkert vant til å skrive symbolet for en vektor som en bokstav med en pil over: $\vec{x}$. I denne boka skriver vi vektorer enten på den måten, eller bare som en liten bokstav: x. Når vi lar være å sette pil over bokstaven, må det være helt klart at det er en vektor vi mener.

Fra før har du kanskje brukt skrivemåten $\vec{x} = [x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n]$ der det er brukt hakeparenteser i stedet for vanlige parenteser. Vi skal seinere se at denne skrivemåten er reservert for det som kalles en **radvektor**, som er en $1 \times n$-matrise, det vil si en matrise med 1 rad og n søyler.

En søylevektor er noe annet enn en radvektor. Derfor er det slik at

$$(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq [x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n]$$

Legg merke til at når vi skriver en vektor x som $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$, så er dette altså en *søylevektor*.

2.2.2 Totalmatrisen til et likningssystem

Vi kan *slå sammen* koeffisientmatrisen til et likningssystem med en søylevektor som består av tallene på høyre side i likningssystemet. Da får vi én matrise som vi kaller likningssystemets **totalmatrise**. Denne matrisen kalles også den **augmenterte** matrisen, den **sammenslåtte koeffisientmatrisen** eller den **utvidede koeffisientmatrisen**. Totalmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} x \;\; &+ 2y - 2z = 4 \\ 4x - y \;\; &+ 3x = 3 \\ 6x \qquad &- 2z = -2 \end{aligned}$$

er:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at totalmatrisen har 3 rader og 4 søyler. Den er altså en 3×4-matrise. På tilsvarende måte blir totalmatrisen til et likningsystem med n likninger og n ukjente er en $n \times (n+1)$-matrise.

2.2.3 Hvordan lage totalmatrisen med MATLAB

MATLAB-tips 2.2

Hvis vi skal løse et lineært likningssystem, har vi sett at vi kan bruke ”linsolve” funksjonen i MATLAB. Da taster vi inn koeffisientmatrisen A og søylevektoren b som inneholder tallene på høyre side av likhetstegnene. Deretter skriver vi ”linsolve(A,b)” i Command Window.

Hvis vi har skrevet inn matrisene A og b i likningssystemet:

$$\begin{aligned} x \;\; &+ 2y - 2z = 4 \\ 4x - y \;\; &+ 3x = 3 \\ 6x \qquad &- 2z = -2 \end{aligned}$$

er det enkelt å lage likningssystemets totalmatrise. Det gjør vi slik:

```
>> clear all
>> A=[ 1 2 -2 ; 4 -1 3 ; 6 0 -2 ]

A =


     1     2    -2
     4    -1     3
     6     0    -2
```

```
>> b=[ 4 ; 3 ; -2 ]

b =

     4
     3
    -2

>> C=[ A,b ]

C =

     1     2    -2     4
     4    -1     3     3
     6     0    -2    -2
```

Vi har kalt totalmatrisen C, og MATLAB kan nå utføre beregninger med den.

2.2.4 Elementære radoperasjoner på matriser

I stedet for å arbeide med likningene når vi skal løse likningssystemet, kan vi arbeide med totalmatrisen. Ved å utføre **elementære radoperasjoner** på *totalmatrisen*, kommer vi fram til en ny matrise som gir oss muligheten til å bestemme løsningen på likningssystemet ved **tilbakesubstitusjon**. Fra avsnitt 2.1 husker vi at det å gjøre tilbakesubstitusjon vil si at vi starter nederst i likningssystemet, beregner verdien til én av de ukjente, og substituerer (setter inn, erstatter) denne verdien i likningene over.

En av fordelene med å løse et likningssystem ved å arbeide med totalmatisen til systemet, er at det er lettere å skrive dataprogrammer som løser systemet. Da kan vi bruke elementære radoperasjoner på matriser.

Setning 2.4

De elementære radoperasjonene vi kan utføre på matriser er:

1. Multiplikasjon av alle matriseelementene i en rad med en konstant forskjellig fra null:
   $cR_i, \ c \neq 0$

2. Bytte om rekkefølgen av to rader:
   swap(R_i, R_j), "swap" betyr "bytt om" rad i og j

3. Addisjon av en rad med et konstant multiplum av en annen rad:
   $cR_i + R_j$

Matrisen vi starter med og matrisen vi ender opp med etter et antall elementære radoperasjoner, kaller vi **radekvivalente**. Det går an å vise at:

Setning 2.5

Dersom to likningssystemer har totalmatriser som er radekvivalente, har likningssystemene samme løsning.

Sagt på en annen måte: Når vi utfører elementære radoperasjoner på totalmatrisen til et lineært likningssystem, endrer ikke løsningen av likningssystemet seg.

Målet med radoperasjonene er å overføre den opprinnelige matrisen til en radekvivalent matrise med form:

$$A_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

En totalmatrise som har denne formen svarer til et likningssytem der den nederste likningen har én ukjent, den midterste har to ukjente, og den øverste har tre. Et eksempel er totalmatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

som svarer til likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3y + z &= 1 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$$

Som vi ser, har totalmatrisen A "trappeform" der det står 0'er under trinnene. Det tilhørende likningssystemet har bare én ukjent i den nederste likningen. Dette kjenner vi igjen fra avsnitt 2.1. Der viste vi hvordan vi løser et likningssystem med denne formen ved *tilbakesubstitusjon*. Vi kan bruke den samme framgangsmåten når vi har fått skrevet matrisen på formen vist over. Vi skal senere se at vi kan løse likningssystemet ved å arbeide videre med matrisen, uten å gå veien om å skrive opp likninger.

▼

Eksempel 2.8

Et likningssystem har denne totalmatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Bruk denne matrisen til å regne ut de ukjente x_1, x_2 og x_3.

Løsning

Totalmatrisen A svarer til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Siden matrisen allerede er skrevet på en gunstig form som egner seg for tilbakesubstitusjon, kan vi begynne med denne prosessen direkte.

Vi starter nederst i totalmatrisen A og jobber oss oppover. Det er viktig å holde god orden sånn at vi ser hva som skjer. Det kan vi gjøre ved å lage en overskrift som viser hvilken rad vi arbeider med.

Rad 3:

Den nederste raden i matrisen A ser slik ut: [0 0 2 6]. Det betyr at den nederste likningen i likningssystemet er slik:

$$0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 3$$

Denne verdien tar vi med oss til likningen i rad 2.

Rad 2:

Rad 2 i matrisen ser slik ut: [0 2 4 8]. Det betyr at likning 2 kan skrives slik når vi setter inn $x_3 = 3$:

$$0x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_2 + 4 \cdot 3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -2$$

De verdiene vi har funnet for x_2 og x_3 setter vi inn i likning 1.

Rad 1:

Rad 1 i matrisen ser slik ut: [1 2 1 4]. Det betyr at den første likningen ser slik ut når vi setter $x_2 = -2$ og $x_3 = 3$:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2 \cdot (-2) + 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5$$

Løsningen til likningsettet er altså :

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$$

Hver av de tre likningene beskriver et plan i rommet. Svaret viser at disse planenen skjærer hverandre i punktet (5, −2, 3).

■

2.2.5 Trappematriser

En matrise som har den spesielle "trappeformen" vi så i forrige avsnitt, kaller vi **trappematrise**. (Noen bøker bruker begrepet **echelonmatrise**.) En trappematrise inneholder nuller etter et bestemt mønster: nullene "samler seg" i nedre del av matrisen.

For en trappematrise gjelder:

1. Alle rader som inneholder bare nuller, er samlet nederst i matrisen.
2. Det matriseelementet som står lengst til venste i en rad, og som er forskjellig fra null, kaller vi det **ledende elementet** i raden.
3. Det ledende elementet i en rad, står i en søyle til høyre for det ledende elementet i raden over.

Matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er eksempler på matriser skrevet på trappeform (echelonform). I A er de ledende elementene 1, 6 og -2. I B er de ledende elementene 1 og 3. I tredje rad i B er det ingen ledende elementer siden alle elementene er lik null.

2.2.6 Metode for å overføre en matrise til trappeform

Vi bruker de elementære radoperasjonene for å overføre en matrise til trappeform. Det er viktig å holde god orden på det vi gjør, samtidig som vi bruker en "kode" for å vise hva som er gjort. Koden som forteller hvilke elementære radoperasjoner vi gjør, er den samme som vi brukte i avsnitt 2.1.3. For eksempel forteller skrivemåten

$$(-2)R_1 + R_3 \to R_3$$

at vi multipliserer rad 1 (forkortet R_1) med -2 og legger det vi får til rad 3 (forkortet R_3). Det vi får da, setter vi inn i rad 3. Den "gamle" rad 3 blir altså *erstattet* med en ny rad 3. Rad 1 beholder vi som den opprinnelig var. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten i praksis.

▼

Eksempel 2.9

Overfør matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ til trappeform.

Løsning

"Formen" på trappematrisen skal være $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$. Vi skal altså ha null nede i venstre hjørne. For å få til det bruker vi elementære radoperasjoner. Vi skal gjøre "noe" med rad 1 og legge det vi da får til rad 2. Dette "noe" vi gjør må være sånn at det blir 0 nede i venstre hjørne etter at vi har addert. Vi skjønner at det er lurt å multiplisere rad 1 med -3 og legge det vi da får til rad 2. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(-3)R_1 + R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

■

Grunnen til at vi skal lære å overføre en matrise til trappeform er at vi ønsker å kunne løse likningssystemer ved å utføre radoperasjoner på totalmatrisen til likningssystemet. I stedet for å skrive opp likningssystemet med symbolene for de ukjente, skal vi *bare* regne med matrisene. Nedenfor har vi vist hvordan vi kan bringe en *totalmatrise* til et likningssystem over på trappeform. Ved siden av operasjonene på totalmatrisen, har vi vist hva som skjer med likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 &+ 4x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)R_1 + R_2 \to R_2 \qquad \begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 &= 3 \\ &- 2x_2 &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Her ser vi at vi lett finner x_2 fra den nederste likningen i likningssystemet. Når vi arbeider med totalmatrisen, må vi vite at den nederste raden i matrisen, det vil si $[0 \ -2 \ -8]$, svarer til likningen $-2x_2 = -8$. Vi skal se flere eksempler på dette seinere i denne boka.

▼ ---

Eksempel 2.10

Overfør matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}$ til trappeform.

Løsning

Vi bruker elementære radoperasjoner. Hvilke operasjoner vi bruker kommer fram av koden til venstre for matrisene. Legg spesielt merke til hvor i matrisen 0'ene "dukker opp" etter hvert. Vi får:

$$\begin{array}{rcc}
 & & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix} \\
(-2)R_1 + R_3 \to R_3 & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix} \\
(-3)R_1 + R_2 \to R_2 & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix} \\
-\dfrac{3}{2}R_2 + R_3 \to R_3 & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Den siste matrisen er skrevet på trappeform.

■

Legg merke til at vi har brukt tegnet $\sim$ foran matrisen. Dette er et tegn vi skal bruke for å vise at to matriser er radekvivalente når vi utfører elementære radoperasjoner.

▼ ---

Eksempel 2.11

Overfør matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ til trappeform.

Løsning

En 2×4-matrise som er skrevet på trappeform, må ha formen

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

der noen av *'ene i rad 2 kan være null. Vi ser at vi kan få matrisen på trappeform ved å bytte de to radene:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

■

Vi merker oss at vi må sørge for at det står et tall forskjellig fra 0 øverst til venstre i matrisen før vi begynner å få fram nullene nedover i matrisen. Vi kan (som regel) få til det ved å bytte om rader, slik vi så i eksempel 2.11.

Når vi starter med en bestemt matrise og overfører den til trappeform, er det mulig å få forskjellige svar. Det kommer av at vi kan utføre de elementære radoperasjonenen vi vil. Hvis Kari har kommet fram til trappematrisen $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, kan Per kvitte seg med brøkene ved å multiplisere rad 1 med 2. Per får da trappematrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Begge disse "svarene" er like riktige fordi de to matrisene er **radekvivalente**. Men, som vi slo fast i avsnittet om elementære radoperasjoner på matriser, vil *begge disse matrisene gi samme løsning på likningssystemet, dersom de er totalmatriser til et likningssystem.*

Rekkefølgen vi bruker når vi overfører matrisen til trappeform er vist skjematisk nedenfor:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Prosessen med å bruke elementære radoperasjoner for å bringe totalmatrisen over på trappeform, kaller vi **gausseliminasjon**. Det var den tyske matematikeren *Carl Friedrich Gauss* (1777 - 1855) som utviklet denne metoden, blant annet for å kunne løse problemer innen landmåling.

2.2.7 Elementære radoperasjoner med MATLAB

MATLAB-tips 2.3

MATLAB er ikke lagd for å gjøre noe så "enkelt" som elementære radoperasjoner, men det *er* mulig å få det til. Sekvensen nedenfor viser hvordan vi kan gå fram for å utføre radoperasjonene i eksempel 2.10.

Legg merke til dette:

- Når vi skriver for eksempel A(3 , :), forteller kolon at vi skal ha med oss alle tallene i rad 3 i matrisen A. Resultatet blir altså en radvektor. Tilsvarende vil for eksempel A(: , 2) bety at vi skal ha med oss alle tallene i søyle 2. Resultatet er en søylevektor.
- Når vi skriver A(3 , :)=A(3 , :)-2*A(1 , :), betyr dette at "ny rad 3" settes lik "gammel rad 3 minus 2 multiplisert med rad 1".

```
>> clear all
>> A= [1 2 1 4 ; 3 8 7 20 ; 2 7 9 23]

A =

     1     2     1     4
     3     8     7    20
     2     7     9    23

>> A(3,:)=A(3,:)-2*A(1,:)

A =

     1     2     1     4
     3     8     7    20
     0     3     7    15

>> A(2,:)=A(2,:)-3*A(1,:)

A =

     1     2     1     4
     0     2     4     8
     0     3     7    15

>> A(3,:)=A(3,:)-(3/2)*A(2,:)

A =

     1     2     1     4
     0     2     4     8
     0     0     1     3
```

For å bytte to rader, slik som i eksempel 2.11, går vi fram slik:

```
>> clear all
>> A=[0 0 1 -4 ; 3 0 0 2]

A =

     0     0     1    -4
     3     0     0     2

>> A([1 2],:)=A([2 1],:)

A =

     3     0     0     2
     0     0     1    -4
```

For å finne ut hva som skjer her, kan du for eksempel taste inn en 3×4-matrise, kalle den A, og så se hva som skjer når du skriver inn kommandoene A(1 , 2), A(3 , :), A(: , 2), A([1 2] , :), A(: , [1 2]) A(: , [1 3])i Command Window.

2.2.8 Totalmatriser og fri og ledende variable. Bruk av parameter.

Likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

har totalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

I totalmatrisen er matriseelementene $a_{11} = 1$ og $a_{23} = 2$ ledende elementer (se avsnitt 2.2.5). Vi bruker begrepet **ledende variabel** om de variable som er knyttet til de ledende elementene. I likningssystemet over er altså x og z ledende variable.

De variable som ikke er knyttet til et ledende element, kaller vi **fri variabel**. I likningssystemet over er y fri variabel. Det ser vi fordi vi lett kan regne ut at $z = 2$ ved å bruke den nederste likningen. Setter vi dette inn i den øverste likningen, får vi $x + y = 1$. Da kan vi *velge* en verdi for y fritt. For hver verdi vi *velger* for y, får vi én verdi for x. Vi kan med andre ord bestemme uendelig mange løsninger av likningssystemet.

MATLAB-tips 2.4

Det hadde også vært mulig å la x være fri variabel, men vi skal velge å la den ukjente som *ikke* er knyttet til et ledende element være fri variabel. Hvis vi løser likningssystemet over med linsolve-funksjonen i MATLAB, får vi svaret

$$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 2$$

Det kan da se ut til at MATLAB har valgt x som fri variabel, og satt denne lik null.

For å kunne skrive opp *alle* løsningene til likningssystemet, setter vi $y = t$. Størrelsen t er en **parameter** som kan anta en hvilken som helst verdi. Vi kan regne ut x uttrykt ved t. Da får vi

$$x = -y + 1 = -t + 1$$

Løsningen skriver vi altså:

$$x = -t + 1, \quad y = t, \quad z = 2$$

Vi har nå sett at det fins likningssystemer som kan ha uendelig mange løsninger. Da skriver vi løsningen ved hjelp av en parameter. Vi oppsummerer dette slik:

Setning 2.6

Dersom vi har flere ukjente enn likninger, vil vi få frie variable.

Sagt på en annen måte:
Hvis det er like mange ledende variable som det er likninger, vil likningssystemet ha én løsning.

Vi illustrerer dette med et eksempel.

▼

Eksempel 2.12

Vi har to likninger med 4 ukjente. Totalmatrisen skrevet på trappeform er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Hvor mange ledende, og hvor mange fri variable, er det i dette likninssystemet?

b. Skriv opp løsningene til likningssystemet.

Løsning

a. Av totalmatrisen ser vi at det er to ledende variable, x_1 og x_3. Siden vi har to likninger med fire ukjente, vil vi få $4 - 2 = 2$ fri variable. Det er x_2 og x_4, noe vi ser av plasseringen til de ledende elementene i trappematrisen.

b. For å bestemme de ukjente, arbeider vi oss systematisk nedenfra og oppover i likningssystemet:

Rad 2:

Rad 2 i matrisen er [0 0 1 1 1]. Det betyr at den tilhørende likningen kan skrives:

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 + x_4 = 1$$

Her er x_3 ledende variabel, mens x_4 er fri variabel.
Vi innfører en parameter og setter:

$$x_4 = t$$

Det gir:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_4 \\ x_3 &= 1 - t \end{aligned}$$

Disse to verdiene tar vi med oss og setter inn i den øverste av de to likningene.

Rad 1:

Rad 1 i matrisen er [1 2 3 4 5]. Det betyr at den tilhørende likningen kan skrives:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3(1-t) + 4t &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 - t \end{aligned}$$

Her er x_1 ledende variabel, og x_2 er fri variabel.
Vi innfører en parameter til og setter:

$$x_2 = s$$

Det gir:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 - t \\ x_1 + 2s &= 2 - t \\ x_1 &= 2 - t - 2s \end{aligned}$$

Løsningen til likningssystemet er da:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - t - 2s, \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1 - t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

$\blacksquare$

2.2.9 Totalmatrisen til et likningssystem som ikke har løsning

I avsnitt 2.1 så vi at dersom en av radene i et likningssystem hadde formen

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad b \neq 0$$

hadde likningssystemet ingen løsning. Når vi arbeider med totalmatriser for å løse likningssystemer, gjelder:

Setning 2.7

Hvis minst én av radene i totalmatrisen til et likningssystem har formen

$$[\,0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ b\,], \quad b \neq 0$$

har likningssystemet ingen løsning.

2.3 Gauss-Jordan eliminasjon

Gauss-Jordan eliminasjon skiller seg fra gausseliminasjon ved at vi ønsker å få inn flere 0'er i matrisen. Lykkes vi, kan vi "se" løsningene til likningssystemet direkte. Den formen vi ønsker at totalmatrisen skal overføres til er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Her kan vi med en gang se at $x = 2$, $y = 3$ og $z = 4$. Hvis vi overfører totalmatrisen til denne formen, slipper vi å skrive opp likningssystemet og gjennomføre tilbakesubstitusjon for å regne ut løsningene til likningssystemet.

2.3.1 En matrise skrevet på redusert trappeform

Når vi skal løse et likningssystem, er det hensiktsmessig å få skrevet totalmatrisen til et likningssystem på formen vi har vist over. Har totalmatrisen denne formen, kan vi lett lese hva løsningen til likningssystemet er. Vi gir denne formen på totalmatrisen navnet **redusert trappeform**.

DEFINISJON 2.1

En matrise er skrevet på **redusert trappeform** dersom den er:

1. skrevet på trappeform
2. alle de ledende elementene er 1
3. hvert av de ledende elementene er det eneste elementet som er forskjellig fra null i den *søylen* det står

Det siste punktet i definisjonen betyr at det står nuller både over og under det ledende elementet. Matrisene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er skrevet på redusert trappeform. Matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

er derimot *ikke* på redusert trappeform. I A er den ledende 1'eren i andre rad *ikke* det eneste ikke-null elementet i søylen: det er et to-tall der også. I B er det ledende elementet i andre rad lik 2, i stedet for 1.

Betegnelsen **pivotelement** blir brukt om det ledende elementet som er lik 1 i en matrise skrevet på redusert trappeform. Plassen pivotelementet står på, kaller vi **pivotposisjonen**, og søylen det står i, kaller vi **pivotsøylen**.

Det går an å vise at:

Setning 2.8

For en matrise fins det bare én måte å skrive den radekvivalente matrisen på redusert trappeform.

Fordelen med å skrive en *total*-matrise på redusert trappeform er åpenbar: Da kan vi lese løsningene av likningssystemet direkte ut av matrisen. Dersom vi har kommet fram til denne totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ser vi at løsningene er $x = 1,\ y = 2$ og $z = 3$.

Vær oppmerksom på at det ikke bare er totalmatriser til likningssystemer som kan skrives på redusert trappeform.

2.3.2 Hvordan overføre en totalmatrise til redusert trappeform

Vi bruker elementære radoperasjoner for å bringe totalmatrisen til et likningssystem over på redusert trappeform. Da sier vi at vi utfører **Gauss-Jordan eliminasjon**. Gauss-Jordan eliminasjon ble første gang omtalt i en håndbok i landmåling. Forfatteren av boka var landmåleren *Wilhelm Jordan* (1842 - 1899).

Rekkefølgen vi bruker for å bringe en 3×4-totalmatrise over på redusert trappeform kan være slik:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Her har vi fått skrevet totalmatrisen på trappeform. Vi går så videre for å bringe den på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Etter at vi har kommet fram til formen i den siste matrisen, dividerer vi hver rad med et passende tall slik at de blir stående 1'ere på skrå nedover:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Dette er totalmatrisen skrevet på redusert trappeform.

Når vi skal overføre en totalmatrise fra trappeform til redusert trappeform, er det viktig at vi starter med å skaffe oss nuller i søylen som står nest lengst til høyre. Deretter jobber vi oss mot venstre når vi skal skaffe nuller i matrisen.

La oss se på et eksempel der vi viser den siste delen av Gauss-Jordan eliminasjonen. Vi tar utgangspunkt i en totalmatrise der vi allerede har brukt gauss-eliminasjon til å overføre den til trappeform.

▼

Eksempel 2.13

Overfør trappematrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

til redusert trappeform.

Løsning

Målet vårt er:

1. først å få matriseelementene $a_{2,3}$ og $a_{1,3}$ til å bli null
2. så få matriseelementet $a_{1,2}$ til å bli null
3. deretter å få matriseelementene $a_{1,1},\ a_{2,2}$ og $a_{3,3}$ til å bli lik 1.

Da vil matrisen ha formen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

der a, b og c er tall. Vi ser at matrisen er skrevet på redusert trappeform.

For å få til dette, bruker vi elementære radoperasjoner. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-1)R_3 + R_2 \to R_2 \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-1)R_3 + R_1 \to R_1 \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-3)R_2 + R_1 \to R_1 \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) R_1 \to R_1 \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

For et likningssystem som har matrisen A til totalmatrise vil løsningen være:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -1, \quad z = 3$$

■

▼

Eksempel 2.14

Skriv totalmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform.

Løsning

Vi bruker Gauss-Jordan eliminasjon. Følgende elementære radoperasjoner gir oss svaret:

1. Bytt rad 1 og rad 3. (Det kan være lurt å ha tallet 1 som matriseelement $a_{1,1}$. Da slipper vi ofte unna litt brøkregning.)
2. $(-3)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$
3. $(-2)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
4. $(-1)R_2 + R_3 \rightarrow R_3$
5. $\frac{1}{19}R_2 \rightarrow R_2$
6. $6R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{6 radoperasjoner}} A_{red.trappef.} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er på redusert trappeform fordi:
- Den er på trappeform
- Alle de ledende elementene ($a_{1,1}$ og $a_{2,3}$) er lik 1
- De ledende elementene er det eneste elementet forskjellig fra null i en søyle.

Noen kommentarer til resultatet av Gauss-Jordan eliminasjonen
Vi har brukt Gauss-Jordan eliminasjon til å løse likningssystemer. Det er ofte det man er interessert i når man jobber som ingeniør. Men: Vi kan overføre matriser til redusert trappeform selv om matrisen ikke er en koeffisientmatrise. Så jobben vi har gjort trenger altså ikke ha noe med likningssystemer å gjøre.

Matrisen A i dette eksempelet skulle være en totalmatrise. Hvordan tolker og bruker vi det svaret vi nå har kommet fram til?

Vi legger først merke til at matrisen A er en 3×3-matrise. Siden dette er en totalmatrise, er søyle 3 det som står på høyre side av likhetstegnet i likningssystemet. Søyle 1 inneholder koeffisientene foran x, og søyle 2 inneholder koeffisientene foran y. Med andre ord: *Matrisen er en totalmatrise til et likningssystem som har 2 ukjente og 3 likninger.* Hva forteller så den reduserte trappematrisen oss? Vi starter med rad 3 og jobber oss oppover.

Rad 3: Raden er $[0\ 0\ 0]$. Det svarer til likningen $0x + 0y = 0$, som er oppfyllt for alle x og y.

Rad 2: Raden er $[0\ 0\ 1]$. Det svarer til likningen $0x + 0y = 1$. Denne likningen har ingen løsning. Derfor kan vi konludere med at likningssystemet ikke har noen løsning.

En geometrisk betraktning kan hjelpe oss til å forstå dette. Men legg først merke til at rad 3 i matrisen har framkommet ved at vi regner ut "rad 1 - rad 2". "Opplysningene" som ligger i rad 3 er helt bestemt av de to andre radene, så rad 3 er egentlig unødvendig å ha med når vi betrakter dette som en koffisientmatrise. Så til geometriargumentet.

Hvis vi går tilbake til den opprinnelige matrisen A, ser vi at den første raden svarer til en likning som kan skrives $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$. Den andre raden svarer til likningen $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$. Grafene til disse to likningene er to rette, parallell linjer. Da vet vi at likningssystemet ikke har noen løsning, og det stemmer med formen den reduserte trappematrisen har.

■

▼

Eksempel 2.15

Et likningssystem har totalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Løs likningssystemet ved å overføre totalmatrisen til redusert trappeform.

Løsning

Ved hjelp av fire elementære radoperasjoner kommer vi fram til den reduserte trappeformen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at vi den nederste raden svarer til en likning som er oppfylt for alle x og y. Rad 1 viser at $x = 4$, og rad 2 viser at $y = -\frac{1}{2}$.

Noen kommentarer til resultatet av Gauss-Jordan eliminasjonen Hvis vi ser på den opprinnelige totalmatrisen, ser vi at rad 3 er summen av rad 1 og rad 2. Derfor ligger det ikke noe ny "informasjon" i rad 3. Vi kan derfor greie oss med å arbeide med de to øverste radene. De gir oss raskt svaret $x = 4$ og $y = -\frac{1}{2}$.

■

2.4 Redusert trappeform og MATLAB

MATLAB-tips 2.5

Det å overføre en matrise til redusert trappeform er så viktig at de som har lagd MATLAB, har lagd en egen kommando for det. Den heter "rref", som står for *Row Reduced Echelon Form*. Her bruker man altså betegnelsen echelon-matrise i stedet for trappematrise, se avsnitt 2.2.5.

Vær oppmerksom på at mange kalkulatorer har innebygd en funksjon for å overføre matriser til redusert trappeform. Noen ganger heter funksjonen "rref" som i MATLAB, andre ganger heter den noe annet. Sjekk brukerhåndboka for å finne ut om, og eventuelt hvordan, *din* kalkulator utfører Gauss-Jordan-eliminasjon.

Vi tar for oss matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

i eksempel 2.13 og overfører den til redusert trappeform ved hjelp av MATLAB. Det gjør vi slik som vist nedenfor:

```
>> clear all
>> A= [ 2 3 1 1 ; 0 1 1 2 ; 0 0 1 3 ]

A =

```

```
     2     3     1     1
     0     1     1     2
     0     0     1     3

>> rref(A)

ans =

    1.0000         0         0    0.5000
         0    1.0000         0   -1.0000
         0         0    1.0000    3.0000
```

Vi ser at vi får samme svar som i eksempel 2.13, men at MATLAB skriver svaret med desimaltall.

▼

Eksempel 2.16

Løs likningssystemet

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +\, x_2 & -\, x_3 & +\, x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +\, x_2 & +\, 3x_3 & +\, x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & +\, 2x_2 & +\, x_3 & +\, 2x_4 & = & 5 \\ x_1 & +\, 3x_2 & +\, 2x_3 & -\, x_4 & = & 0 \end{array}$$

ved å bruke gauss-jordaneliminasjon på totalmatrisen.

Løsning

Vi skriver totalmatrisen inn i MATLAB's Command Window og bruker kommandoen "rref". Da får vi:

```
>> clear all
>> A=[ 2 1 -1 1 4 ; -1 1 3 1 -1 ; 3 2 1 2 5 ; 1 3 2 -1 0]

A =

     2     1    -1     1     4
    -1     1     3     1    -1
     3     2     1     2     5
     1     3     2    -1     0

>> rref(A)

ans =
```

```
    1.0000         0         0         0    0.6000
         0    1.0000         0         0    0.7500
         0         0    1.0000         0   -0.8000
         0         0         0    1.0000    1.2500
```

Vi ser at likningssystemet har løsning

$$x_1 = 0.60 \quad x_2 = 0.75 \quad x_3 = -0.80 \quad x_4 = 1.25$$

■

▼

Eksempel 2.17

Totalmatrisen til et likningssystem er:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Overfør matrisen til redusert trappeform. Tolk svaret.

Løsning

Vi bruker MATLAB og får:

```
>> clear all
>> A=[ 1 3 2 ; -2 1 4 ; 2 0 1 ]

A =

     1     3     2
    -2     1     4
     2     0     1

>> rref(A)

ans =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Vi har tre likninger med 2 ukjente. Likningen som svarer til rad 3 kan skrives $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, det vil si $0 = 1$. Rad 3 forteller oss at likningssystemet ikke har løsninger.

■

▼

Eksempel 2.18

Et likningssystem har totalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Løs likninssystemet.

Løsning

Vi bruker MATLAB og får:

```
>> clear all
>> A=[ 1 2 1 4 1 ; 2 -1 3 0 2 ]

A =

     1     2     1     4     1
     2    -1     3     0     2

>> rref(A)

ans =

    1.0000         0    1.4000    0.8000    1.0000
         0    1.0000   -0.2000    1.6000         0
```

Her har vi 2 likninger med 4 ukjente, x_1, x_2, x_3 og x_4. Det betyr at vi har to frie variable. Vi må derfor innføre parametre.

Når vi tar utgangspunkt i totalmatrisen skrevet på redusert trappeform, ser vi at vi kan sette

$$x_3 = s \qquad x_4 = t$$

Fra rad 2 får vi da at $x_2 = 0.20\,s - 1.60t$. Fra rad 1 får vi $x_1 = 1.00 - 1.40\,s - 0.80\,t$. Løsningen blir altså:

$$x_1 = 1.00 - 1.40\,s - 0.80\,t \qquad x_2 = 0.20\,s - 1.60t \qquad x_3 = s \qquad x_4 = t$$

■

2.5 Homogene likningssystemer

Et likningssystem er **homogent** dersom alle konstantene på høyre side av likhetstegnet er lik null. Likingssystemene

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & -\,4x_2 & +\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & +\,3x_2 & -\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

og

$$x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad = \; 0$$

er begge homogene.

Alle homogene likningssystemer har en løsning som vi kaller den **trivielle løsningen**. I den trivielle løsningen er alle de ukjente lik null. Andre mulige løsninger kaller vi **ikke-trivielle**.

Hvis det er flere ukjente enn likninger i et homogent system, er det uendelig mange løsninger av systemet. Det kommer av at det da er minst en fri variabel. Den kan vi gi en verdi forskjellig fra null. Vi kan uttrykke dette slik:

Setning 2.9

Et homogent likningssystem har en ikke-triviell løsning hvis, og bare hvis, likningssystemet har minst én fri variabel.

I likningssystemet

$$x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad = \; 0$$

er det 2 frie variable. Derfor har systemet en ikke-triviell løsning. Løsningen kan vi skrive

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

For å avgjøre om likningssystemet

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & -\,4x_2 & +\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & +\,3x_2 & -\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

har en ikke-triviell løsning, kan vi overføre totalmatrisen til redusert trappeform. Da får vi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Av totalmatrisen skrevet på redusert ecehlonform ser vi at likningssystemet bare har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

▼

Eksempel 2.19

Avgjør om det homogene likningssystemet som har totalmatrise

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har en ikke-triviell løsning.

Løsning

Vi bruker elementære radoperasjoner på matrisen B for å overføre den til redusert trappeform. Etter noen operasjoner får vi:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av den nederste raden $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ser vi at x_3 er fri variabel. Denne kan velges fritt. Derfor kan likningssystemet ha en løsning som *ikke* er den trivielle løsningen.

■

▼

Eksempel 2.20

Et likningssystem har totalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

For hvilke verdier av b har likningssystemet en ikke-triviell løsning?

Løsning

Et homogent likningssystem har en ikke-triviell løsning når det har minst én fri variabel. Av totalmatrisen A ser vi at x_2 er fri variabel når $b = 0$, siden rad 2 da har formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Av samme grunn ser vi at x_3 er fri variabel når $b = \pm 1$.

Konklusjonen blir at likningssystemet har en ikke-triviell løsning når b er lik -1, 0 eller 1.

■

2.6 Løsningsvektor: Geometriske betraktninger

Det kan være hensiktsmessig å skrive løsningen til et likningssystem som en vektor. Da samler vi alle verdiene vi har regnet ut i én søylevektor x. Hvis vi har løst et likningssystem og funnet at $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \cdots,\ x_n = a_n$, kan vi skrive løsningsvektoren som en søylevektor slik (se også avsnitt 2.2.1):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$$

Her har vi brukt to forskjellige skrivemåter for søylevektorer, se avsnitt 2.2.1.

Vi skal se nærmere på noen forskjellige tilfeller vi kan komme borti. I dette avsnittet skal vi begrense oss til tilfeller der likningssystemene har 2 eller 3 ukjente. Vi skal se hvordan vi kan bruke løsningsvektoren til å gi en geometrisk tolkning av svaret vi får når vi løser et likningssystem.

2.6.1 Geometrisk tolkning: løsningen er ett punkt

Dersom et likningssystem har én løsning, for eksempel

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

kan vi skrive løsningen som en vektor på denne måten:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at vektoren er en konstant vektor når likningssystemet har én bestemt løsning. Løsningen kan vi framstille grafisk som punktet $(2,\, -1,\, 1)$ i rommet.

2.6.2 Geometrisk tolkning: løsningene ligger på en linje

Likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{array}$$

har totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

skrevet på redusert trappeform. Det betyr at x_2 er fri variabel. Løsningen til likningssystemet er:

$$x_1 = -t + 1, \quad x_2 = t$$

Vi kan skrive svaret som en løsningsvektor:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\,a + b$$

der a er søylevektoeren $(-1,\, 1)$ og b er søylevektoren $(1,\, 0)$. Den siste delen av dette uttrykket er et eksempel på det vi kaller er **lineær kombinasjon** av de to vektorene $(-1,\, 1)$ og $(1,\, 0)$. Koeffisienten foran vektoren $(-1,\, 1)$ er t, og koeffisienten foran vektoren $(1,\, 0)$ er 1. Vi skal se nærmere på lineær kombinasjon av vektorer i avsnitt 2.7. Her nøyer vi oss med å si at vektoren u er en linær kombinasjon av vektorene a og b dersom vi kan skrive

$$u = s\,a + t\,b$$

I figur 2.8 har vi tegnet løsningen for parameterverdien $t = 2$. I figur 2.9 har vi tegnet løsningsvektorene for parameterverdiene $t = -1$, $t = 0$ og $t = 2$. De tre spissene på vektorene ligger på ei rett linje. Når t varierer, vil spissen av vektoren $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ følge den rette linja gjennom de tre spissene. Den geometriske tolkningen av løsningen til likningssystemet er altså at de mulige løsningene ligger på ei rett linje gjennom punktet $(1,\, 0)$ og som har samme retning som vektoren $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Hvis et likningssystem har totalmatrise

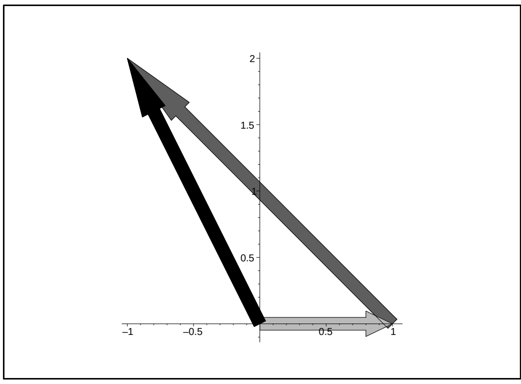
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er løsningen

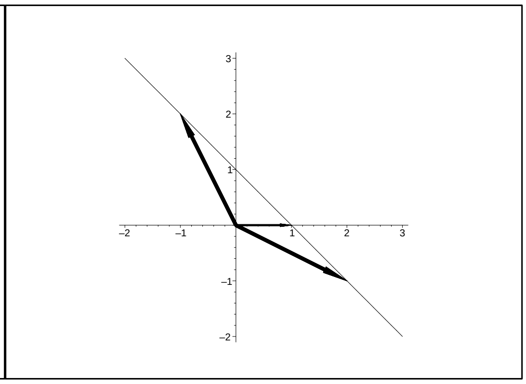
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = t + 2 \qquad x_3 = t$$

Da kan vi skrive løsningsvektoren slik:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t+2 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = t\,a + b$$



Figur 2.8: Figuren viser vektorene $(1,\ 0)$, $2\cdot\ (-1,\ 1)$ og summen av dem: $(-1,\ 2) = (1,\ 0) + 2\cdot\ (-1,\ 1)$.



Figur 2.9: Når parameteren t varierer, vil spissen av vektoren $(x_1,\ x_2) = t\cdot(-1,\ 1)+(1,\ 0)$ følge ei rett linje.

Den geometriske tolkningen av dette er at de mulige løsningene ligger på ei rett linje i rommet. Linja går gjennom punktet $(1,\ 2,\ 0)$ i den retningen vektoren $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ peker. Vi kan også si dette på en annen måte: Alle løsningene til likningssystemet ligger på ei linje gjennom punktet $(1,\ 2,\ 0)$ og som er parallell med vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

▼

Eksempel 2.21

Bestem løsningsvektoren til likningssystemet

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +\, x_2 & +\, x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Gi en geometrisk tolkning av svaret.

Løsning

Vi ser at x_1 og x_3 er ledende variable, og at x_2 er fri variabel. Vi setter $x_2 = t$. Dette gir:

$$x_1 = -t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0$$

Løsningsvektoren kan da skrives:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\,a$$

Når vi multipliserer en vektor a med et tall t, får vi en ny vektor som er parallell med a. Når t endrer seg, vil lengden av $t\,a$ endre seg. Geometrisk svarer derfor vektoren $x = t\,a = t \cdot (-1,\, 1,\, 0)$ til en parameterframstilling av den rette linja gjennom origo i retning langs vektoren a.

■

I eksempel 2.21 så vi at alle løsningene kunne skrives ved hjelp av vektoren a. Vi sier at vektoren a **utspenner** alle løsningene. Vi sier også at a utspenner **løsningsrommet** til likningssystemet. I engelskspråklig litteratur skrives dette ofte som Span$\{a\}$.

2.6.3 Geometrisk tolkning: løsningene ligger i et plan

Noen ganger må vi bruke 2 parametre for å beskrive løsningene til et likningssystem. Løsningen til likningssystemet

$$x + 2y - z = 0$$

kan for eksempel skrives

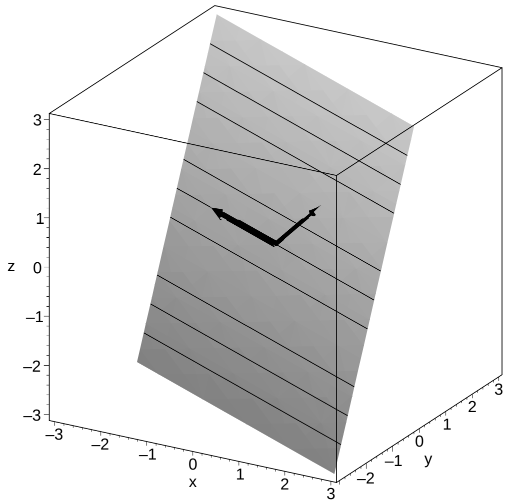
$$x = -2s + t, \quad y = s, \quad z = t$$

Hvis vi skriver denne løsningen som en løsningsvektor, får vi:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s + t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\ a + t\ b$$

De to vektorene $a = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger begge i planet $x+2y-z = 0$. Det ser vi ved å sette inn verdiene av $x,\ y$ og z inn i likningen $x + 2y - z = 0$ og se at venstre side blir lik høyre side.

Ved å velge passende verdier av parametrene s og t, kan vi komme til et hvilket som helst punkt i dette planet. Setter vi for eksempel $s = 1$ og $t = 2$, er



Figur 2.10: Planet $x + 2y - z = 0$ og vektorene $a = (-2, 1, 0)$ og $b = (1, 0, 1)$.

$$x = 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektoren x er en vektor med spissen i punktet (0, 1, 2).

Alle punktene vi får når vi regner ut $x = s\,a + t\,b$ for forskjeliige verdier av s og t er altså en løsning av likningssystemet. I figur 2.10 har vi tegnet de to vektorene a og b og planet de ligger i.

Vi ser at alle løsningene til likningssystemet kan skrives ved hjelp av de to vektorene a og b. Vi sier at de to vektorene **utspenner** løsningene til likningssystemet. Vi sier også at a og b utspenner **løsningsrommet** til likningssystemet. I engelskspråklig litteratur skriver man ofte Span$\{a, b\}$.

2.6.4 Parameterframstilling for linje og plan

I de foregående avsnittene har vi sett på geometrisk tolkning av løsningen til et likningssystem. Vi har sett at vi kan framstille linjer og plan ved hjelp av parameterframstillinger. Vi oppsummerer resultatene slik:

Setning 2.10

Vi lar a, b og c være tre vektorer i rommet som ikke er parallelle. Videre setter vi løsningsvektoren lik x. Størrelsene s og t er to skalarer. Da gjelder:

1. Uttrykket

$$x = t\,a$$

framstiller ei rett linje gjennom origo parallell med vektoren a.

2. Uttrykket

$$x = t\,a + b$$

framstiller ei linje som går gjennom spissen av vektoren $b = \overrightarrow{OB}$ (det vil si punktet (b_1, b_2, b_3)) parallell med vektoren a.

3. Uttrykket

$$x = s\,a + t\,b$$

framstiller planet som er utspent av vektorene a og b. Planet går gjennom origo.

4. Uttrykket

$$x = s\,a + t\,b + c$$

framstiller et plan som går gjennom spissen av vektoren $c = \overrightarrow{OC}$ (det vil si punktet (c_1, c_2, c_3)) og som er parallelt med planet utspent av vektoren a og b og som går gjennom punktet (c_1, c_2, c_3).

▼

Eksempel 2.22

a. Bestem en parameterframstilling for planet som går gjennom origo og punktene A $(1, 1, 1)$ og B $(-1, 1, 1)$.

b. Bestem en parameterframstilling for planet som går gjennom punktene A $(1, -2, -1)$, B $(1, 1, 1)$ og C $(-1, 1, 1)$.

Løsning

a. Fra oversikten foran vet vi at planet kan skrives:

$$x = s\,a + t\,b$$

Vi må altså bestemme vektorene a og b.

Vektorene $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ spenner ut planet. Det betyr at vi kan sette vektor $a = \overrightarrow{OA} = (1-0, 1-0, 1-0) = (1, 1, 1)$ og vektor $b = \overrightarrow{OB} = (-1 - 0, 1-0, 1-0) = (-1, 1, 1)$. En parameterframstilling er da:

$$x = s(1,\, 1,\, 1) + t(-1,\, 1,\, 1)$$

b. Fra oversikten foran vet vi at planet kan skrives:

$$x = s\,a + t\,b + c$$

Vi må altså bestemme a, b og c.

Vi kan for eksempel velge å sette vektor $c = \overrightarrow{OC} = (-1,\, 1,\, 1)$. Videre lar vi $a = \overrightarrow{CA} = (2,\, -3,\, -2)$ og $b = \overrightarrow{CB} = (2,\, 0,\, 0)$. En parameterframstilling blir da:

$$x = s\,(2,\, -3,\, -2) + t\,(2,\, 0,\, 0) + (-1,\, 1,\, 1)$$

■

2.7 Lineær kombinasjon av vektorer

I videregående skole eller i forkurset har du lært hvordan vi kan legge sammen vektorer, og hvordan vi kan multiplisere en vektor med et tall. Som et eksempel på dette kan vi multiplisere (søyle)vektoren $v_1 = (1,\, 1)$ med 2 og legge til (søyle)vektoren $v_2 = (0,\, 2)$ multiplisert med 3:

$$2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\cdot 0\\3\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+0\\2+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$$

Her har vi vist at vi kan skrive vektoren $x = (2,\, 8)$ slik:

$$x = 2v_1 + 3v_2$$

Vi sier da at vi har skrevet x som en lineær kombinasjon av vektorene $v_1 = (1,\, 1)$ og $v_2 = (0,\, 2)$:

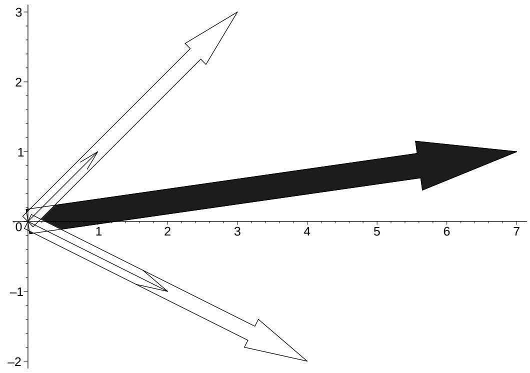
At en vektor v er skrevet som en **lineær kombinasjon** av vektorene u_1 og u_2, vil si at det fins tall m_1 og m_2 som er slik at

$$v = m_1\,u_1 + m_2\,u_2$$

Dette kan vi generalisere slik:

DEFINISJON 2.2

> Hvis $v_1,\, v_2,\, \cdots,\, v_n$ er vektorer og $x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$ er skalarer, sier vi at vektoren u er en **lineær kombinasjon** av $v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n$ dersom u kan skrives:
>
> $$u = x_1\,v_1 + x_2\,v_2 + \cdots + x_n\,v_n$$



Figur 2.11: Figuren viser hvordan vi geometrisk går fram for å lage den lineære kombinasjonen $3v_1 + 2v_2 = 3 \cdot (1,\, 1) + 2 \cdot (2,\, -1)$.

Noen eksempler på lineære kombinasjoner av vektorene v_1 og v_2 er:

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = -2v_1 + 2v_2, \quad u_3 = 0v_1 + 3v_2 = 3v_2$$

Når vi lager en lineær kombinasjon av to vektorer, multipliserer vi hver vektor med et tall, og legger resultatet sammen. Å multiplisere en vektor med et tall, betyr at vi lager en ny vektor som er parallell med den første. Den nye vektoren får en annen lengde hvis tallet vi ganger med er forskjellig fra 1. Er tallet vi ganger med mindre enn 0, snur vektoren retning. Vi kan si at det å lage en lineær kombinasjon betyr å "strekke vektorene og så legge dem sammen".

I figur 2.11 har vi vist hvordan vi geometrisk kan lage en lineær kombinasjon av to vektorer. Der har vi illustrert den lineære kombinasjonen

$$u = 3v_1 + 2v_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at vektoren $v_1 = (1,\, 1)$ blir strukket med en faktor 3, mens vektoren $v_2 = (2,\, -1)$ blir strukket med en faktor 2. Deretter legges de to vektorene sammen.

2.7.1 Hvordan bestemmer vi en lineær kombinasjon? Vektorlikning.

Noen ganger ønsker vi å skrive en vektor som en lineær kombinasjon av to eller flere andre vektorer. For å få til det, må vi løse et system av lineære likninger. Det er bare når dette likningssystemet har en løsning at det er mulig å "lage" den lineære kombinasjonen. Vi skal se noen eksempler.

▼

Eksempel 2.23

Skriv vektoren $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon av vektorene $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Løsning

Å skrive vektoren u som en lineær kombinasjon av v_1 og v_2 betyr at vi ønsker å bestemme to tall x_1 og x_2 slik at

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = u$$

Vi skriver dette ut slik:

$$\begin{aligned}
x_1 v_1 + x_2 v_2 &= u \\
x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vi bruker nå at to vektorer er like hvis, og bare hvis, komponentene er parvis like. Det gir likningssystemet:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Hvis vi bruker Gauss-Jordan eliminasjon på totalmatrisen til dette likningssystemet, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det betyr at $x_1 = 2$ og $x_2 = 1$. Vektoren u kan altså skrives som en lineær kombinasjon av vektorene v_1 og v_2 på denne måten:

$$u = x_1\, v_1 + x_2\, v_2 = 2\, v_1 + v_2 \qquad \blacksquare$$

I eksempel 2.23 løste vi likningen $x_1 v_1 + x_2 v_2 = u$ der x_1 og x_2 var de ukjente. Dette er et eksempel på en likning av formen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = u$$

der x_1, x_2, …, x_n er skalarer og v_1, v_2, …, v_n, b er vektorer. En slik likning kaller vi en **vektorlikning**.

I eksempel 2.23 så vi at vi må løse en vektorlikning når vi skal forsøke å skrive en gitt vektor som en lineær kombinasjon av andre, gitte vektorer. Å bestemme lineærkombinasjonen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = u$ er altså det samme som å løse et likningssystem der x_1, x_2, …, x_n er de ukjente, og som har en totalmatrise der vektorene v_1, v_2, $\cdots$, v_n og u er søyler, det vil si matrisen $[v_1\ v_2\ \cdots\ v_n\ u]$. Av dette skjønner vi at:

Setning 2.11

Det er mulig å skrive en vektor u som en lineær kombinasjon av vektorene v_1, v_2, $\cdots$, v_n hvis, og bare hvis, likningssystemet med totalmatrise $[v_1\ v_2\ \cdots\ v_n\ u]$ har én løsning.

▼

Eksempel 2.24

Skriv vektoren $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon av vektorene $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, hvis det er mulig.

Løsning

Å skrive u som en lineær kombinasjon av v_1 og v_2 betyr at vi ønsker å skrive $u = x_1 v_1 + x_2 v_2$. Vi skal altså regne ut skalarene x_1 og x_2. Det er det samme som å løse likningssystemet som har totalmatrise $[v_1\ v_2\ u]$. Vi overfører totalmatrisen til trappeform ved å bruke gausseliminasjon. Det gir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Av den nederste raden ser vi at dette likningssystemt ikke har noen løsning. Det er altså ikke mulig å skrive u som en lineær kombinasjon av v_1 og v_2.

Vi kan begrunne at det ikke er mulig å skrive u som $u = x_1v_1 + x_2v_2$ *uten* å regne: Vi ser at tredjekomponenten til både v_1 og v_2 er lik null. Det betyr at de to vektorene ligger i xy-planet. Tredjekomponenten til u er derimot forskjellig fra null. Det betyr at u *ikke* ligger i xy-planet. Når vi lager en lineær kombinasjon av v_1 og v_2, skal vi "strekke og legge sammen" disse vektorene. Uansett hvordan vi strekker v_1 og v_2, er det ikke mulig "å komme opp fra" xy-planet slik at vi kan få "dannet" vektoren u.

■

2.7.2 Lineær kombinasjon skrevet som produkt av en vektor og en matrise

Orienteringsstoff ✓

Ved å lage noen hensiktsmessige definisjoner, kan vi skrive den lineære kombinasjonen $x_1\, v_1 + x_2\, v_2 = 4 \cdot (1,\, 1) + 5 \cdot (-2,\, 3)$ av søylevektorer som et produkt mellom en matrise A og en vektor x.

Matrisen A skal vi definere slik at søylene er de to vektorene $v_1 = (1,\, 1)$ og $v_2 = (-2,\, 3)$. Dette skriver vi kompakt slik: $A = [\, v_1\ v_2\,]$. Vektoren x skal være koeffisientene x_1 og x_2 foran vektorene, det vil si søylevektoren $x = (4,\, 5)$.

Vi *definerer* produktet mellom matrisen A og vektoren x slik:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dette kan vi generalisere slik:

DEFINISJON 2.3

Hvis matrisen A er matrisen som har vektorene $v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n$ til søyler, $A = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n]$, og vektoren x er søylevektoren med komponenter $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, *definerer* vi produktet Ax slik:

$$Ax = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

Produktet er bare definert dersom det er like mange søyler i matrisen A som det er komponenter i vektoren x.
Vi kan *ikke* bytte om rekkefølgen på A og x. Det betyr at $Ax \neq xA$.

Definisjonen gjør oss i stand til å skrive den lineære kombinasjonen $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ som et produkt mellom en matrise A og en vektor x. Den viser også hvordan vi kan multiplisere en matrise med en vektor. Dette skal vi komme tilbake til i kapittel 3.

▼

Eksempel 2.25

Regn ut

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Løsning

Vi bruker definisjonen og får:

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Ax &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ser at multiplikasjonen mellom 3×3-matrisen A og 3×1-vektoren x gir en 3×1-vektor til svar.

■

I kapittel 3 skal vi lære en annen (og mer effektiv) metode for å regne ut produktet Ax mellom en matrise og en vektor. I det avsnittet vi arbeider med nå er det imidlertid viktigst å skjønne at produktet Ax kan oppfattes som en lineær kombinasjon av søylene i matrisen A.

▼

Eksempel 2.26

Skriv den lineære kombinasjonen $2v_1 - v_2 + 3v_3 - 2v_4$ som et produkt mellom en matrise og en vektor.

Løsning

Søylene i matrisen A skal være vektorene v_1, v_2, v_3 og v_4. Vi kjenner ikke komponentene i vektorene, så vi må skrive A som $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$. Vektoren x har komponenter som er lik koeffisientene som står foran vektorene. Den lineære kombinasjonen kan skrives:

$$2v_1 - v_2 + 3v_3 - 2v_4 = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

■

▼

Eksempel 2.27

Skriv likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_2 &= 1 \\ -x_1 \quad + x_2 &= -3 \end{aligned}$$

som $Ax = b$, der A er en matrise og x og b er vektorer.

Løsning

Vi ønsker først å skrive både venstre og høyre side som vektorer. Deretter utnytter vi at to vektorer er like dersom de er like komponent for komponent.

Hvis vi studerer likningssystemet, ser vi at vi kan skrive det slik:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

At dette er riktig, ser vi ved å regne ut venstre side, og så sammelikne med det opprinnelige likningssystemet.

Vi ser at venstre side i den siste likningen er en lineær kombinasjon av to vektorer. Da kan vi skrive dette som et produkt mellom en matrise og en vektor. Dette gir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Her er likningssystemet skrevet på formen $Ax = b$.

■

Alle lineære likningssytemer kan skrives på formen $Ax = b$. Matrisen A har koeffisientene i likningssystemet som matriseelementer. Vektoren x er en søylevektor som har de ukjente størrelsene som komponenter. Vektoren b er en søylevektor som har konstantene på høyre side av likhetstegnene som komponenter.

Når vi skriver et likningssystem på formen $Ax = b$, sier vi at vi skriver det på **vektor-matriseform**. For å kunne skrive opp likningssystemet så raskt som mulig, sørger vi for at vi skriver likningssystemet på en systematisk måte sånn at hver av de ukjente står rett under hverandre.

▼

Eksempel 2.28

Skriv likningssystemet

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +\,2x_3 & -\,x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +\,x_3 & +\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & +\,3x_2 & -\,x_3 & & = & 0 \\ 2x_1 & -\,x_2 & +\,3x_3 & -\,2x_4 & = & 2 \end{array}$$

på vektor-matriseform.

Løsning

Her ser vi at i noen av likningene "mangler" det en ukjent. Det betyr at koeffisienten foran denne ukjente er lik null. Den første av likningene kan for eksempel skrives slik:

$$x_1 \quad + \; 2x_3 - \; x_4 = x_1 \; + 0x_2 \; + \; 2x_3 - \; x_4 = 4$$

Hvis vi erstatter alle "tomrommene" i likningssystemet med 0'er multiplisert med den tilhørende ukjente, kan vi skrive likningssystemet slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■

Som oftest går det greit å overføre et likningssystem til vektor-matriseform ved å betrakte koeffisientene foran de ukjente, og så skrive opp matrisen og vektorene direkte uten først å skrive opp en lineær kombinasjon av søylene i matrisen.

Vi merker oss også at likningssystemet kan skrives som en lineær kombinasjone av søylene v_1, v_2, v_3 og v_4:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = b$$

Vi har nå sett at det er en sammenheng mellom løsningene til et likningssystem, muligheten til å skrive en vektor som en lineær kombinasjon av andre vektorer, og søylene i koeffisientmatrisen til likningssystemet. Vi kan oppsummere dette slik:

Setning 2.12

Hvis A er en $m \times n$-matrise og b er en $n \times 1$-vektor, er disse utsagnene ekvivalente:

a) Likningssystemet $Ax = b$ har en løsning for alle b.

b) Vektoren b kan skrives som en lineær kombinasjon av søylene i matrisen A

At utsagnene er ekvivalente betyr at enten er begge riktige, eller så er begge feil. Vi kan for eksempel si:

"Fordi likningssystemet $Ax = b$ har en løsning for alle b, kan vi skrive vektoren b som en lineær kombinasjon av søylene i matrisen A"

Eller vi kan si:

"Siden vi ikke kan skrive vektoren b som en lineær kombinasjon av søylene i matrisen A, har ikke likningssystemet $Ax = b$ har en løsning for alle b."

2.7.3 Å regne med matriser

Orienteringsstoff ✓

Det går an å gjøre andre beregninger med matriser enn å utføre multiplikasjonen Ax. Dette skal vi ta opp i kapittel 3. Der skal vi også se på en mer effektiv måte å regne ut Ax.

2.8 Lineær uavhengighet

Begerepet **lineær uavhengighet** er sentralt i lineær algebra. Det henger nøye sammen med lineær kombinasjon. Vi skal arbeide med lineær uavhengighet i kapittel 5, men vi velger å gi en kort introduksjon her.

2.8.1 Innledning

Fra videregående skole, eller fra forkurset, vet vi at to vektorer v_1 og v_2 er parallelle dersom vi kan skrive $v_1 = t\,v_2$, der t er et tall. De to vektorene $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er *ikke* parallelle. Derfor kan vi *ikke* bestemme et tall t som er slik at sammenhengen mellom vektorene kan skrives $v_1 = k\,v_2$.

Det er ikke mulig å bestemme to tall x_1 og x_2 som er slik at sammenhengen mellom de tre vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

kan skrives som en lineær kombinasjon $v_3 = x_1\,v_1 + x_2\,v_2$. Det er fordi ingen av dem er parallell med noen av de andre, og fordi v_1 og v_2 ligger i xy-planet, mens v_3 ikke gjør det (se eksempel 2.24).

Vektorer som har disse egenskapene sier vi er **lineært uavhengige**.

De to vektorene $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ er *ikke* lineært uavhengige fordi v_2 kan skrives som $v_2 = -3v_1$.

De tre vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er *ikke* lineært uavhengige fordi

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

det vil si at $v_3 = v_1 + v_2$.

Vektorer som *ikke* er lineært uavhengige, sier vi er **lineært avhengige**.

2.8.2 Definisjon av lineær uavhengighet

Hvis vektorene v_1, v_2 og v_3 er lineært *avhengige* slik som i likning 2.2, kan vi skrive én av dem som en lineærkombinasjon av de to andre:

$$x_1v_1 + x_2v_2 = x_3v_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1v_1 + x_2v_2 - x_3v_3 = 0$$

Konstantene x_1, x_2 og x_3 kan ikke alle være null for at dette skal være mulig. Denne idéen gir opphav til følgende definisjoner:

DEFINISJON 2.4

a) Vektorene v_1, v_2, ..., v_n er **lineært uavhengige** dersom vektorlikningen

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

bare har den trivielle løsningen, det vil si at $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

b) Vektorene v_1, v_2, ..., v_n er **lineært avhengige** dersom det fins tall x_1, x_2, ..., x_n, ikke *alle* lik null, slik at

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

Definisjonen av lineær uavhengighet sier oss at det ikke er mulig å lage en lineær kombinasjon av vektorene som gir null-vektoren, bortsett fra i det tilfellet at vi multipliserer *alle* vektorene med null.

2.8.3 Hvordan avgjøre om vektorer er lineært uavhengige

For å undersøke om vektorene v_1, v_2, ..., v_n er lineært uavhengige, undersøker vi om det homogene likningssystemet

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

bare har den trivielle løsningen. Hvis det er tilfellet, er vektorene lineært uavhengige. For å undersøke dette, kan vi bruke standard metoder for å løse likningssystemer. Vi illustrerer dette med et eksempel.

▼

Eksempel 2.29

Bruk definisjonen av lineær uavhengighet til å vise at (søyle)vektorene $v_1 = (1,\, 2)$ og $v_2 = (2,\, -3)$ er lineært uavhengige.

Løsning

I følge definisjonen er de to vektorene lineært uavhengige dersom likningen

$$x_1\, v_1 + x_2\, v_2 = 0$$

bare har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = 0$. For å se om vektorene er lineært uavhengige, løser vi derfor likningssystemet. Vi gjør utregningen litt omstendelig, i mange steg:

$$x_1\, v_1 + x_2\, v_2 = 0$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skal de to vektorene være like, må komponentene være parvis like. Det leder til likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array}$$

Vi skriver opp totalmatrisen og overfører den til redusert trappeform (bruk for eksempel kommandoen "rref" i MATLAB):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette viser at vektorlikningen $x_1\, v_1 + x_2\, v_2 = 0$ bare har den trivielle løsningen. Derfor er vektorene lineært uavhengige.

Legg merke til at matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ har søyler som består av de to vektorene v_1 og v_2, og null-vektoren.

■

I eksempel 2.29 så vi at problemet med å sjekke om en vektorlikning bare har den trivielle løsningen, ledet fram til problemet med å overføre en totalmatrise til redusert trappeform. Totalmatrisen hadde søyler som svarer til de to vektorene vi skal underøke om er lineært uavhengige, samt en høyre søyle der alle elementene er lik null.

I stedet for å gjennomføre alle de stegene vi gjorde i eksempel 2.29, kan vi ta en snarvei: Vi skriver opp totalmatrisen direkte ved å la koeffisientmatrisen være matrisen som har vektorene som søyler. Eksempel 2.30 illustrerer dette.

▼

Eksempel 2.30

Undersøk om vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Løsning

Fra definisjonen vet vi at de tre vektorene er lineært uavhengige hvis vektorlikningen

$$x_1\, v_1 + x_2\, v_2 + x_3\, v_3 = 0$$

bare har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dette leder fram til et likningssystem som har totalmatrise (se eksempel 2.29):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Når vi bruker Gauss-Jordan-eliminasjon, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette viser at vektorlikningen bare har den trivielle løsningen. I følge definisjon 2.4, blir konklusjonen at vektorene er lineært uavhengige.

■

▼

Eksempel 2.31

a. Vis at vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er lineært avhengige.

b. Bestem verdier av x_1, x_2 og x_3 slik at $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$.

Løsning

a. For å undersøke om vektorene er lineært <u>u</u>avhengige, må vi undersøke om likningen $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ bare har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Omvendt betyr dette at dersom likningen har en ikke-triviell løsning (det vil si at ikke *alle* x_i'ene er lik null), er vektorene lineært avhengige.

   Vi bruker samme framgangsmåte som eksempel 2.30, det vil si at vi skriver opp totalmatrisen med en gang, og overfører denne til redusert trappeform. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Den nederste raden i den reduserte trappematrisen viser at x_3 er en fri variabel. Det betyr at vi kan bestemme x_1, x_2 og x_3 forskjellige fra 0 slik at $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$. Dette betyr at vektorene er lineært avhengige.

b. Siden x_3 er fri variabel, setter vi $x_3 = t$. Da gir den andre raden i den reduserte trappematrisen $x_2 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = t$. Den øverste raden i matrisen gir $x_1 + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2t$.

   Siden x_3 er en *fri* variabel, kan vi *velge* en vilkårlig verdi. Hvis vi for eksempel *velger* $x_3 = t = 1$, får vi:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

   Vi kan derfor skrive

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Siden vi kan velge x_3 fritt, ser vi at det er mange løsninger på spørsmål b. Men alle løsningene er slik at de er multiplum av de andre: Vi kan multiplisere x_3 med et vilkårlig tall, og da multipliseres x_1 og x_2 med det samme tallet.

■

2.8.4 Hva skjer når det er flere vektorer enn antall komponenter i hver vektor?

De tre vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært avhengige siden $2v_1 + v_2 = v_3$.

Det går an å vise at det *alltid* er sånn at dersom vi har flere enn to vektorer, hver med to komponenter, vil disse være lineært avhengige.

Følgende setning gjelder:

Setning 2.13

Hvis p vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$, hver har n komponenter, er de lineært avhengige hvis $p > n$.

Med utgangspunkt i denne setningen kunne vi derfor uten videre ha sagt at de tre vektorene v_1, v_2 og v_3 over er lineært avhengige siden vi har $p = 3$ vektorer hver med $n = 2$ komponenter, slik at $p > n$.

2.8.5 Geometrisk tolkning av lineær uavhengighet

I kapittel 5 skal vi se nærmere på lineær uavhengighet. Vi skal imidlertid skrive opp to resultater som kan være nyttige.

Setning 2.14

a) To vektorer v_1 og v_2 med to komponenter er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke er parallelle.

b) To vektorer v_1 og v_2 med tre komponenter er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke er parallelle.

c) Tre vektorer v_1, v_2 og v_3 med tre komponenter er lineært uavhengige hvis og bare hvis to av dem er lineært uavhengige, og den tredje ikke ligger i det samme planet som de to.

2.9 Drøfting av antall løsninger av et likningssystem

Vi har sett at det er tre mulige tilfeller vi kan komme bort i når vi løser likningssystemer: Systemet kan ha én, ingen eller uendeling mange løsninger.

Fra utseendet til totalmatrisen etter en gausseliminasjon kan vi si noe om antall løsninger til likningssystemet:

1. Dersom det er like mange ledende variable som likninger, vil systemet ha én løsning, forutsatt at det ledende elementet ikke står helt til høyre i raden.

   Formen på totalmatrisen *etter* gausseliminasjon kan være:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

   I dette tilfellet er det 3 likninger og 3 ledende variable.

2. Dersom likningssystemet inneholder en eller flere fri variable, og høyre søyle i totalmatrisen ikke inneholder bare 0'er, har vi uendelig mange løsninger.

   Formen på totalmatrisen *etter* gausseliminasjon kan være:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   I dette tilfellet er det 3 likninger, men bare 2 ledende variable.

3. Dersom en av radene inneholder bare 0'er, bortsett fra helt til høyre, har ikke likningssystemet noen løsning.

   Formen på totalmatrisen *etter* gausseliminasjon kan være:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

   I dette tilfellet er det 3 likninger, men ingen av de ukjente opptrer som ledende variabel i den ene av likningene.

Når likningene vi skal løse framkommer ved å bruke fysiske lover på et virkelig system (for eksempel bruk av Newtons lover og kraftmomentsetningen på et fagverk, eller Kirchhoffs lover anvendt på elektriske kretser), kan det hende at vi innfører en fysisk størrelse som vi ønsker å kunne variere. Det kan for eksempel være tverrsnittet på en bjelke, tettheten til materialet vi ønsker å bruke, eller resistansen i en motstand. Disse størrelsene er da **designparametre** som gir oss en valgfrihet når vi skal konstruere det virkelige systemet vårt.

Designparametre må ikke forveksles med de paramtrene vi innfører når vi løser likningene. Når vi regner ut løsningen til likningene, oppfatter vi designparameteren som en *konstant* størrelse. I utregningene oppfatter vi den som et tall.

Når vi har regnet ut svaret, uttrykt ved designparametrene, kan det hende at vi kommer fram til situasjoner der vi ikke kan bruke alle slags verdier på designparametrene. Det kan for eksempel hende at tverrsnittet til en bjelke må være større enn en viss minsteverdi. Vi må da **drøfte** svarene vi har regnet ut med hensyn på designparametrene. Et eksempel vil vise hva dette betyr.

▼

Eksempel 2.32

Et likningssystem inneholder en (design-)parameter a. Vi overfører totalmatrisen til trappeform. Da får vi denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{bmatrix}$$

Drøft antall løsninger til likningssystemet.

Løsning

Å "drøfte" et likningssystem som dette vil si at vi finner ut hva slags løsninger vi har for ulike verdeier av a. Her er alle a'ene samlet i tredje rad, sånn at det holder å studere denne raden. Det er spesielt de tilfellene som gjør matriseelementene $a_{3,3}$ og/eller $a_{3,4}$ lik null som er av betydning.

Tilfelle 1

Dersom $a = 2$ blir tredje rad: $[0\ 0\ 0\ 0]$. Det betyr at den tredje likningen har formen $0 \cdot x_3 = 0$. Denne likningen er oppfylt for alle verdier av x_3 slik at vi får uendelig mange løsninger.

Tilfelle 2

Dersom $a = -2$ blir tredje rad: $[0\ 0\ 0\ \ -4]$. Det betyr at den tredje likningen har formen $0 \cdot x_3 = -4$. Det er ingen verdier av x_3 som oppfyller dette kravet, slik at likningssystemet ikke har løsninger.

Tilfelle 3

Dersom a er forskjellig fra 2 og -2, blir tredje rad: $[0\ 0\ \ a^2-4\ \ a-2]$ der a^2-4 og $a-2$ er tall som begge er forskjellige fra null. Likningen som denne raden svarer til er $(a^2-4)x_3 = a-2$. Da kan vi regne ut x_3. Vi får:

$$x_3 = \frac{a-2}{a^2-4} = \frac{1}{a+2}$$

Denne verdien kan vi sette inn i radene 1 og 2, sånn at vi kan bestemme x_1 og x_2 også. Derfor har likningssystemet én løsning.

Husk på at vi oppfatter a'en som en konstant når vi skriver opp svaret. Selv om vi har frihet til å sette inn ulike verdier av designparameteren a, oppfatter vi at vi bare har én løsning i Tilfelle 3.

■

Kapittel 3

Å regne med matriser og determinanter

3.1 Regneregler for matriser

I dette avsnittet skal vi se på hvordan vi kan regne med matriser. Fra avsnittet om koeffisientmatriser til likningssystemer vet vi at en matrise er beskrevet ved hvor mange rader og søyler den har. En $m \times n$-matrise har m rader og n søyler. Vi sier at matrisen har **størrelsen** $m \times n$. To matriser har samme **størrelse** eller **form** dersom de har like mange rader og søyler.

Tallene som står i matrisen kaller vi **matriseelementer**. Er navnet på matrisen A, er a_{ij} (eller med komma mellom i og j: $a_{i,j}$) matriseelementet som står i rad i regnet ovenfra og søyle j regnet fra venstre. En matrise kan også skrives på kompakt form slik:

$$A = [a_{ij}]$$

3.1.1 Addisjon av matriser

Vi skal nå definere addisjon/subtraksjon av matriser. *Vi kan bare addere og subtrahere matriser som har samme størrelse.* Når matrisene har samme størrelse, legger vi sammen (trekker fra hverandre) matriseelementer som står på samme plass. Det vil si at vi legger sammen elementer med samme i og j:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 & -2-1 \\ 4+2 & -1-4 & 3+6 \\ 6-1 & 0+0 & -2+3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Ikke bland sammen addisjon av matriser og det å slå sammen matriser til en totalmatrise (adjungert matrise). Det er to helt forskjellige ting.

MATLAB-tips 3.1

I MATLAB skriver vi addisjon og subtraksjon av matriser på samme måte som med papir og blyant.

```
>> A=[1 2 ; 3 4]
A =
     1     2
     3     4

>> B=[2 1; 3 0]
B =
     2     1
     3     0

>> A+B
ans =

     3     3
     6     4

>> A-B
ans =

    -1     1
     0     4
```

3.1.2 Multiplikasjon av en matrise og et tall

Når vi multipliserer en matrise med et tall, multipliserer vi alle matriseelementene med tallet. Hvis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

vil $2A$ bli:

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 6 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Dette kan vi skrive slik:

$$c \cdot [a_{ij}] = [c \cdot a_{ij}]$$

MATLAB-tips 3.2 I MATLAB skriver vi multiplikasjon av en matrise med et tall på samme måte som med papir og blyant.

```
>> A=[1 2 ; 3 4]
A =
     1     2
```

```
     3     4

>> 2*A
ans =
     2     4
     6     8
```

3.1.3 Matrisemultiplikasjon

Vi skal nå se hvordan vi multipliserer sammen en matrise med en matrise eller med en vektor. For at det skal være mulig å multiplisere matriser med hverandre, må vi forsikre oss om at de to matrisene vi ganger sammen har riktige størrelser:

Setning 3.1

For at vi skal kunne regne ut matriseproduktet AB, må A ha like mange søyler som det er rader i B.

Vi kan også si at det må være like mange elementer i en rad i A som det er elementer i en søyle i B.

Dersom A for eksempel er en 2×5-matrise, må det være 5 rader i B. Det er ikke noe krav om hvor mange søyler det skal være i B. Hvis det for eksempel er 3 søyler i B, viser dette skjemaet hvilke størrelser som er "involvert" i multiplikasjonen:

$$[2 \times 5] \cdot [5 \times 3] \longrightarrow [2 \times 3]$$

Resultatet av multiplikasjonen er altså en 2×3-matrise. Generelt kan vi skrive dette slik:

$$[n \times m] \cdot [m \times k] \longrightarrow [n \times k]$$

Dette skjemaet viser at m'en "blir borte" når vi skal se hva størrelsen til den nye matrisen blir, og størrelsen til produktmatrisen blir det som "står igjen".

Metoden vi skal bruke når vi skal multiplisere matriser med hverandre, kan vi illustrere slik:

Dersom rad i i matrise A er $[1 \ \ 2 \ \ 3]$ og søyle j i matrise B er $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ blir matriseelementet $(AB)_{ij}$ regnet ut slik:

$$(AB)_{ij} = [1 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

For å regne ut et matriseelement i produktmatrisen AB, ganger vi altså sammen elementer i rad i i matrise A med elementer i søyle j i matrise B, og legger sammen de produktene vi får. I matrisemultiplikasjonen

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

vil dette svare til at $(AB)_{22} = [1 \;\; 2 \;\; 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$. Vi ser også at

$$(AB)_{12} = [1 \;\; 0 \;\; -1] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 = -2$$

Som en øvelse kan det være lurt å vise at

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 32 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Se gjerne på neste eksempel først.

▼ ---

Eksempel 3.1

Forklar at det er mulig å utføre matrisemultiplikasjonen AB der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Utfør multiplikasjonen.

Løsning

Matrisen A har størrelse 2×2 og matrisen B har størrelsen 2×1. Siden det er like mange elementer i en rad i A som det er elementer i en søyle i B, er det mulig å multiplisere matrisene. Størrelsen til AB blir:

$$[2 \times 2] \cdot [2 \times 1] \to [2 \times 1]$$

Produktet blir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \end{bmatrix}$$

■

MATLAB-tips 3.3

I MATLAB skriver vi multiplikasjon av matriser på samme måte som med papir og blyant.

```
>> A=[1 2 ; 3 4 ; 5 6]
A =
     1     2
     3     4
     5     6

>> B=[1 0 ; 3 1]
B =
     1     0
     3     1

>> A*B
ans =
     7     2
    15     4
    23     6
```

3.1.4 Divisjon av matriser er ikke definert

Å dividere med en matrise er ikke definert. Som vi skal se senere, er det derimot mulig å multiplisere med den **inverse** til en matrise, dersom den inverse eksisterer.

3.1.5 Transponering av matriser

Vi bestemmer den **transponerte** til en matrise ved å bytte om rader og søyler. Hvis matrisen heter A, skriver vi den transponerte som A^T, som vi leser som "A-transponert". Hvordan vi transponerer en matrise framgår av dette eksempelet:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Vi ser at første rad i A har blitt første søyle i A^T, osv. Vi kan si at vi gjør om radene til søyler, og søylene til rader, når vi transponerer. Hvis A er en $n \times m$-matrise, blir A^T en $m \times n$-matrise. Kompakt kan vi skrive dette slik:

$$A = [a_{ij}] \quad \Leftrightarrow \quad A^T = [a_{ji}]$$

Disse reglene gjelder for transponering av matriser:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = cA^T$, der c er en skalar
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Legg spesielt merke til regel 4. Når vi transponerer et produkt av to matriser, kan vi transponere matrisene og gange dem sammen *bare hvis vi bytter rekkefølgen vi multipliserer matrisene i.* Det har selvsagt sammenheng med at størrelsene på matrisene må stemme overens for at det i det hele tatt skal være mulig å gange dem med hverandre.

▼

Eksempel 3.2

Transponer matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Løsning

Når vi transponerer, lar vi radene bli søyler. Dette gir:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

■

MATLAB-tips 3.4 MATLAB har selvsagt en ferdig rutine for å regne ut den transponerte til en matrise. Vi skriver en apostrof etter navnet til matrisen A' for å regne ut den transponerte. Det er også mulig å skrive "transpose(A)".

```
A =
     1     2     3
     4     5     6

>> A'
ans =
     1     4
     2     5
```

```
     3     6

>> transpose(A)
ans =
     1     4
     2     5
     3     6
```

3.1.6 Vektorer

En vektor er en matrise som har én søyle. Det kaller vi en **søylevektor**. En vektor kan også ha én rad. Det kaller vi en **radvektor**.

En forenklet skrivemåte for en søylevektor er:

$$\vec{a} = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n)$$

Denne søylevektoren er altså en $n \times 1$-matrise.

Merk at dette er noe annet enn en radvektor, som skrives slik:

$$\vec{a} = a = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

Denne radvektoren er altså en $1 \times n$-matrise.

Vi skiller en søylevektor fra en radvektor ved å bruke forskjellige parenteser.

3.1.7 Noen spesielle matriser

I dette avsnittet skal vi se nærmere på noen spesielle matriser.

Kvadratiske matriser

Hvis det er like mange rader i en matrise som det er søyler, er matrisen **kvadratisk**. Et eksempel på en kvadratisk matrise er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kvadratiske matriser har størrelsen $n \times n$, der n er et helt, positivt tall.

Diagonlmatriser

At en *kvadratisk* matrise er **diagonal** betyr at alle elementer utenfor diagonalen er null. Diagonalen som går fra øvre venstre til nedre høyre hjørne i matrisen, kaller vi **hoveddiagonalen** i matrisen. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er et eksempel på en diagonalmatrise.

Identitetsmatrisen

Diagonalmatrisen som har bare 1-tall langs hoveddiagonalen kaller vi **identitetsmatrisen** eller **enhetsmatrisen**. Den skrives ofte I. Enhetsmatrisen med størrelse 3×3 er:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATLAB-tips 3.5 For å lage en identitetsmatrise i MATLAB, kan vl bruke kommandoen "eye(n)" der n er antall rader og søyler.

```
>> eye(4)
ans =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

Triangulære matriser

Dersom det står bare nuller under hoveddiagonalen i en kvadratisk matrise, sier vi at den er **øvre triangulær**. Dersom det er bare nuller over hoveddiagonalen, er matrisen **nedre triangulær**. Matrisen A nedenfor er øvre triangulær, mens matrisen B er nedre triangulær:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

En matrise som er skrevet på trappeform er altså øvre triangulær.

Symmetriske matriser

En kvadratisk matrise A er **symmetrisk** dersom $A = A^T$, det vil si dersom matrisen er lik den transponerte. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

er et eksempel på en symmetrisk matrise. Vi ser at $A = A^T$.

Null-matrisen

En matrise der alle matriseelementene er null, kaller vi **nullmatrisen**. 2×2-nullmatrisen er

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I MATLAB lager vi null-matrisen ved å bruke kommandoen "zeroes(m,n)" der m er antall rader og n er antall søyler. **MATLAB-tips 3.6**

```
>> zeros(3,2)
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

3.1.8 Flere regneregler for matriser

Disse reglene gjelder for regning med matriser:

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$

Vi kjenner igjen disse reglene fra regning med tall.

Derimot er det *ikke* bestandig den kommutative loven for multiplikasjon gjelder. Det vil si at vi *ikke uten videre kan bytte rekkefølgen når vi ganger sammen matriser.* "Faktorenes orden er ikke nødvendigvis likegyldig" når vi regner med matriser. Dette skriver vi slik:

$$AB \neq BA$$

For **nullmatrisen** 0 og **identitetsmatrisen** (**enhetsmatrisen**) I gjelder:

$$A + 0 = A$$
$$AI = IA = A$$

3.2 Anvendelse av matriseregning: Lineære transformasjoner

Orienteringsstoff ✓
Se kapittel 4.

For å se noen anvendelser av matriseregning, skal vi her gi en kort introduksjon til **lineære transformasjoner**. Vi skal komme mer tilbake til dette i kapittel 4.

I konstruksjonsprogrammer (for eksempel AutoCAD) er det mulig å lage tredimensjonale bilder av konstruksjoner, for eksempel et fagverk, ei bru eller et hus. Det er også mulig å bruke disse programmene til å beregne krefter, bøyninger og tøyninger i konstruksjonen. En viktig bruk av slike programmer er å kunne manipulere bildet vi får på dataskjermen ved å taste inn kommandoer, eller ved å bruke mus. Vi kan for eksempel se konstruksjonen fra forskjellige posisjoner.

Når vi "vrir" på bildet av konstruksjonen ved å flytte musen, regner dataprogrammet ut hvordan konstruksjonen ser ut fra det nye "utsiktspunktet". Disse beregningene kan være basert på matrisemultiplikasjon. Her skal vi se noen enkle eksempler på hvordan vi kan bruke matrisemultiplikasjon til å "flytte" på punkter.

Vi skal la punkter i xy-planet bli representert ved vektorer. Punktet (1, 1) i planet vil vi for eksempel representeres ved søylevektoren $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

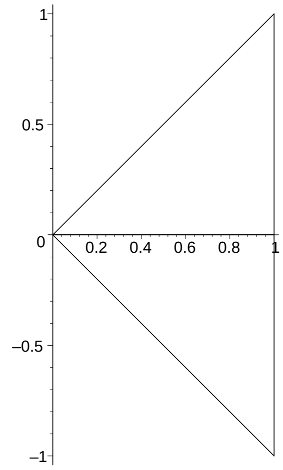
3.2.1 Speiling om x-aksen

Hvis vi multipliserer matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ med en vektor $x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, vil vi få en ny vektor x_2:

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Denne vektoren representerer et punkt x_2. Vi ser at det nye punktet x_2 har samme x-koordinat, men ligger like langt fra x-aksen som x_1 fordi x_1 har y-koordinat y, mens y_2 har y-koordinat $-y$. Punktene x_1 og x_2 er altså speilbilder av hverandre, med x-aksen som speil.

For å illustrere at matrisemultiplikasjonen Ax representerer en speiling om x-aksen, har vi multiplisert alle punktene i trekanten med hjørner i (0, 0), (1, 0) og (1, 1) med "speilematrisen" A. Figur 3.1 viser dette. (Vi skal bruke denne trekanten videre i dette avsnittet, og døper den derfor "Trekanten", med stor T!)



Figur 3.1: Trekanten med hjørner i (0, 0), (1, 0) og (1, 1) blir speilet om x-aksen ved at alle punkter i trekanten blir multiplisert med "speilematrisen".

3.2.2 Skjærforflytning

Dersom vi dytter med en horisontal kraft på toppen av en rammekonstruksjon (for eksempel ei dørramme) mens vi holder bunnen fast, vil rammen forskyve seg. Den blir skeiv. Krefter som er parallelle med overflaten til et materiale vil forårsake *skjærspenninger* i materialet. En forflytning som den vi beskriver med rammen, blir av og til kalt for *skjærforflytning.*

For å regne ut hvordan en konstruksjon endrer form når den blir utsatt for skjærkrefter, kan vi multiplisere alle punktene i konstruksjonen med en **skjærmatrise**. Denne matrisen har form $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dersom skjærkreftene virker parallelt med x-aksen.

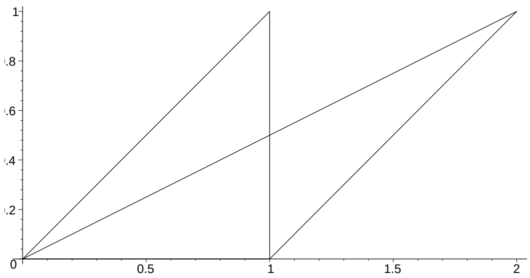
Konstanten k er et mål på hvor stor forflytningen blir. Setter vi for eksempel $k = 1$ vil punktet $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forflytte seg slik:

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Generelt for punktet $x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ får vi:

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$$

Av dette uttrykket ser vi at y-koordinaten holder seg konstant, mens x-koordinaten vil øke. Økningen er proporsjonal med avstanden fra x-aksen. Multipliserer vi



Figur 3.2: Trekanten med hjørner i (0, 0), (1, 0) og (1, 1) blir utsatt for skjærkrefter parallelle med x-aksen ved at alle punkter i Trekanten blir multiplisert med "skjærmatrisen".

alle punktene i Trekanten fra forrige eksempel med skjærmatrisen der $k = 1$ får vi en "skeiv" trekant, slik som vist i figur 3.2.

3.3 Likninger skrevet på vektor-matriseform

Det viser seg at et likningssystem kan skrives som et produkt mellom en matrise og en vektor. Vi sier at vi skriver likningssystemet på **vektor-matrise-form**. Dersom A er koeffisientmatrisen til likningssystemet, x er en søylevektor som inneholder de ukjente, og b er søylevektoren som inneholder konstantene på høyre side av likhetstegnet, kan et lineært likningssytem skrives slik:

$$Ax = b$$

Her har vi unnlatt å skrive vektortegn på vektorene x og b. Det kan vi tillate oss siden det går klart fram av sammenhengen at x og b er vektorer. Dersom det kan være tvil, skriver vi for eksempel piler over vektorene:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Når vi skriver likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

på vektor-matriseform, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

At dette er riktig, ser vi ved å multiplisere matrisen med vektoren på venstre side av likhetstegnet, og så sette hver av komponentene i vektorene like hverandre.

I neste avsnitt skal vi se hvordan vi kan løse likninger som er skrevet på vektor-matriseform. Da skal vi se hvordan vi regner ut **løsningsvektoren** direkte ved hjelp av **den inverse matrisen** til A. I eksemplet over kan vi lett regne ut at løsningen til likningssystemet er $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{12}{7}$. Det betyr at løsningen til likningssystemet $Ax = b$ skrevet på vektorform blir:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

der A^{-1} er den inverse til matrisen A.

▼

Eksempel 3.3

Skriv likningssystemet på vektor-matriseform:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = & 3 \\ -x_1 & +\,2x_2 & -\,x_3 & = & -1 \\ x_1 & -\,x_2 & & = & 1 \end{array}$$

Løsning

Koeffisientmatrisen er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da kan vi skrive likningssystemet slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

3.4 Den inverse til en matrise

Når vi skal løse likningen $3x = 4$ kan vi gjøre det ved å multiplisere på begge sider av likhetstegnet med den inverse til koeffisienten 3:

$$3x = 4 \Leftrightarrow 3^{-1} \cdot 3x = 3^{-1} \cdot 4 \Leftrightarrow x = 3^{-1} \cdot 4$$

Å multiplisere med den inverse er det samme som å dele så lenge vi arbeider med reelle tall. Så lenge vi ikke prøver å regne ut 0^{-1}, går dette bra.

Vi har sett hvordan vi kan løse lineære likningssystemer, og hvordan vi kan skrive et slikt likningssystem ved hjelp av koeffisientmatrisen og ved hjelp av totalmatrisen. Dersom A er koeffisientmatrisen, x er en søylevektor som inneholder de ukjente, og b er en søylevektor som inneholder koeffisientene på høyre side av likhetstegnene, kan vi skrive likningssystemet slik:

$$Ax = b$$

Tenk om vi kunne ha løst dette likningssystemet på samme måte som vi løste likningen $3x = 4$, nemlig ved å multiplisere med den inverse til koeffisienten foran den ukjente! Vi kunne ha gjort dette slik:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1} \cdot b$$

For å få til det, må vi finne ut hva den inverse A^{-1} betyr, og finne ut hvordan vi skal regne ut A^{-1}. Det er det dette avsnittet dreier seg om.

3.4.1 Den inverse matrisen A^{-1}

Vi sier at de kvadratiske matrisene A og B er **inverse** dersom:

$$AB = BA = I$$

Matrisen B er den inverse til matrisen A, og vi skriver $B = A^{-1}$.

Setning 3.2

Det er *bare* kvadratiske matriser som *kan* ha en invers.

Men: det er slett ikke sikkert at en kvadratisk matrise faktisk har en invers. Det er det samme vi kjenner igjen fra regning med tall: Det er ikke alle tall som har en invers. (Hvilket tall er det?)

Legg merke til at vi kan bytte om rekkefølgen på matrisene når vi multipliserer sammen to inverse matriser, det vil si at $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A$.

Dersom det er mulig å finne en invers matrise til A, sier vi at A er **invertibel**. Noen ganger bruker vi også uttrykket **ikke-singulær** om matriser som er invertible. Det går an å vise at:

Setning 3.3

Dersom den kvadratiske matrisen A er invertibel, er den inverse matrisen A^{-1} unik.

Det fins med andre ord bare én invers til en matrise. Dersom B og C begge er inverse matriser til A, så er $AB = I$ og $AC = I$. Da kan vi vise at $B = C$.

For 2×2-matriser er det enkelt å bestemme den inverse:

Setning 3.4

Dersom

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

og $ad - bc \neq 0$, er den inverse matrisen A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

At uttrykket er riktig ser vi ved å regne ut AA^{-1} og $A^{-1}A$. Da får vi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ der I er identitetsmatrisen.

▼

Eksempel 3.4

Regn ut den iverse til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Løsning

Vi bruker uttrykket for den inverse til en 2×2-matrise, likning 3.1, og får:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 1 \cdot 2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved direkte utregning ser vi at $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ for disse matrisene.

■

▼

Eksempel 3.5

a. Skriv likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= -1 \end{aligned}$$

   på vektor-matrise-formen $Ax = b$.

b. Regn ut $A^{-1}b$ der A^{-1} og b er matrisene fra likningssystemet i spørsmål a.

c. Gi en tolkning av svaret i spørsmål b.

Løsning

a. Når vi skriver likningssystemet på vektor-matriseform får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. Vi kjenner igjen koeffisientmatrisen i spørsmål a fra eksempel 3.4. Derfor har vi allerede regnet ut den inverse til A. Når vi multipliserer sammen A^{-1} og b får vi:

$$A^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

c. Hvis vi multipliserer begge sider av likningen $Ax = b$ med A^{-1} fra venstre, får vi:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad Ix = x = A^{-1}b$$

Dette viser at den vektoren vi får når vi regner ut $A^{-1}b$ er vektoren som har de ukjente i likningen som elementer. Svaret i spørsmål b viser at $x_1 = 11$ og $x_2 = 4$. Det kan vi se stemmer ved å sette inn i likningssystemet.

■

3.4.2 Hvordan regner vi ut A^{-1} når A har størrelse $n \times n$?

I avsnitt 3.4.1 så vi hvordan vi kunne regne ut den inverse til 2×2-matriser ved å bruke en formel. I dette avsnittet skal vi vise hvordan vi kan regne ut den inverse til en $n \times n$-matrise. I avsnitt 3.4.6 skal vi se hvordan vi kan bruke MATLAB til å regne ut inverse matriser.

Eksistens av inversmatrise

Akkurat som at det fins et tall som *ikke* har en ivers (tallet 0), fins det kvadratiske matriser som ikke har en invers. En setning forteller oss hvilke krav som må være oppfylt for at vi skal kunne bestemme en invers matrise:

Setning 3.5

En $n \times n$-matrise er invertibel (har en invers) hvis, og bare hvis, den er radekvivalent med $n \times n$-identitetsmatrisen.

Dette betyr at dersom vi kan overføre en matrise A til identitetsmatrisen I ved å bruke elementære radoperasjoner, så eksisterer den inverse matrisen A^{-1}. Det motsatte utsagnet gjelder også: Dersom A^{-1} eksisterer, kan vi overføre A^{-1} til I ved elementære radoperasjoner. Det er denne "dobbeltheten" som ligger i uttrykket *hvis og bare hvis*.

Setning 3.5 kan brukes for å avgjøre om en matrise A har en invers. Vi må da utføre elementære radoperasjoner på A og forsøke å overføre den til identitetsmatrisen. Dette er en tidkrevende prosess. I avsnitt 3.5.6 skal vi se på en annen metode som ofte er mindre arbeidskrevende.

Algoritme for å bestemme den inverse

I setning 3.5 så vi at en matrise har en invers dersom den kan overføres til identitetsmatrisen ved å bruke elementære radoperasjoner. Hver radoperasjon har også en invers radoperasjon. For eksempel er den inverse radoperasjonen til det å multiplisere en rad med et tall, å dividere med det samme tallet.

I beviset for setningen som forteller at en matrise er invertibel hvis og bare hvis den er radekvivalent med identitetsmatrisen, viser det seg at hvis vi utfører de samme radoperasjonene på identitetsmatrisen som på matrisen A, vil identitetsmatrisen bli overført til den inverse til A.

Ideen med metoden vi kan bruke for å regne ut den inverse til en matrise, er å overføre matrisen A til enhetsmatrisen I ved hjelp av elementære radoperasjoner, *samtidig* som vi utfører de samme radoperasjonenen på enhetsmatrisen. Hvis vi skal bestemme den inverse til matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, utfører vi elementære radoperasjoner på den sammenslåtte matrisen:

$$\begin{bmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den loddrette streken markerer her skillet mellom matrisen A og identitetsmatrisen. Resultatet av radoperasjonene skal bli slik at den sammenslåtte matrisen har formen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & e & f \\ 0 & 1 & | & g & h \end{bmatrix}$$

Matrisen $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ er da den inverse matrisen til A. Vi skal altså utføre elementære radoperasjoner slik at

$$\begin{bmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & e & f \\ 0 & 1 & | & g & h \end{bmatrix}$$

Dette skriver vi kompakt slik:

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$

▼

Eksempel 3.6

Regn ut den inverse til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ved å bruke metoden beskrevet ovenfor.

Løsning

Vi slår sammen matrisen A med identitetsmatrisen. Vi markerer skillet mellom den opprinnelige matrisen A og identitetsmatrisen med en loddrett strek, og skriver denne matrisen $[A \mid I]$. Så utfører vi elementære radoperasjoner på A og overfører A til identitetsmatrisen, *samtidig* som vi utfører de samme radoperasjonene på identitetsmatrisen. Dette ser slik ut:

$$
\begin{array}{rcl}
 & [A \mid I] = & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
-3R_1 + R_2 \to R_2 & \sim & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
R_2 + R_1 \to R_1 & \sim & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
-\frac{1}{2}R_2 \to R_2 & \sim & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]
\end{array}
$$

Den inverse matrisen til A står nå til høyre for den loddrette streken. Vi ser altså at

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

At dette virkelig er den inverse matrisen til A ser vi ved å regne ut AA^{-1} og $A^{-1}A$. Begge disse produktene blir enhetsmatrisen I.

■

Dersom vi ikke klarer å redusere den venstre halvdelen av den sammenslåtte matrisen til identitetsmatrisen, er ikke matrisen invertibel. I så fall vil det på et eller annet tidspunkt dukke opp en rad som inneholder bare nuller i den venstre halvdelen. Hvis vi for eksempel, etter å ha utført flere elementære radoperasjoner, har kommet fram til matrisen:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

kan vi konkludere med at matrisen ikke har en invers, siden det står $[0\ 0\ 0]$ nederst til venstre.

Elementærmatriser

Orienteringsstoff ✓

For å bevise setningen om eksistensen av en invers matrise, trenger vi begrepet elementærmatrise.

DEFINISJON 3.1

En $n \times n$-matrise E blir kalt en **elementærmatrise** dersom den kan lages ved *én* elementær radoperasjon (se avsnitt 2.2.4) på enhetsmatrisen I.

Dersom vi utfører en elementær radoperasjon på matrisen A, er resultatet det samme vi får når vi utfører denne radoperasjonen på I (som gir matrisen E), og deretter multipliserer E med A: EA. Hvis pila $\longrightarrow$ betegner en enkelt elementær radoperasjon, kan vi skrive dette slik:

$$A \longrightarrow C$$
$$I \longrightarrow E$$
$$EA = C$$

Et eksempel viser dette:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad 3R_2 \to R_2 \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3R_2 \to R_2 \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = C$$

Elementærmatriser brukes sjelden i beregninger, men spiller en viktig rolle i beviset for hvordan man kan beregne den inverse til en matrise (dersom den eksisterer). Beviset viser også hvordan metoden med å bestemme den inverse matrisen fungerer. Vi skal ikke gjennomføre beviset i denne boka.

3.4.3 Regneregler for inverse matriser

Dersom matrisen A har en invers A^{-1}, gjelder disse reglene:

Setning 3.6

$$
\begin{aligned}
A^0 &= I \\
A^{n+1} &= A^n A,\ n \geq 1 \\
A^{-n} &= (A^{-1})^n \\
A^r A^s &= A^{r+s} \\
(A^r)^s &= A^{rs} \\
(A^{-1})^{-1} &= A \\
(A^n)^{-1} &= (A^{-1})^n \\
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}
\end{aligned}
$$

Vi legger merke til at de fleste reglene likner dem som gjelder for regning med tall. Et viktig unntak er den siste regelen som gjelder den inverse til et produkt av matriser. Dersom a og b er tall, kan vi som vi vet skrive $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, mens vi for matriser må bytte om rekkefølgen av matrisene på høyre side av likhetstegnet.

3.4.4 Egenskaper ved invertible matriser

At to utsagn er *ekvivalente*, vil si at de betyr det samme. Vi kan erstatte det ene utsganet med det andre. Er det ene utsagnet sant, er også det andre sant. Er det ene utsagnet galt, er også det andre galt. Kaller vi utsagnene U1 og U2, kan vi si at "Å si U1 er det samme som å si U2".

Det går an å vise at disse egenskapene er ekvivalente, det vil si at de betyr det samme:

Setning 3.7

1. A er invertibel (har en invers).
2. Likningen $Ax = 0$ har bare den trivielle løsningen, det vil si $x = 0$ (nullvektoren).
3. Likningen $Ax = b$ har bare én løsning x, som kan beregnes ved uttrykket $x = A^{-1}\,b$.
4. A er radekvivalent med identitetsmatrisen med samme størrelse.

Når vi har lært om determinanter (se avsnitt 3.5), skal vi se at det er lurt å ta med en egenskap til.

3.4.5 Å løse likninger ved å bruke inverse matriser

I avsnitt 3.3 så vi at et likningssystem kan skrives på vektor-matriseform. Det betyr at likningssystemet kan skrives:

$$Ax = b$$

der A er koeffisientmatrisen, x er en søylevektor som inneholder de ukjente, og b er en søylevektor som inneholder konstantene på høyre side av likhetstegnet i likningene.

Fra avsnitt 3.4.4 vet vi at dette likningssystemet har nøyaktig én løsning dersom A er invertibel. Da vet vi at A^{-1} eksisterer, og vi kan bruke for eksempel metoden med å utføre elementære radoperasjoner for å regne den ut. Når vi har bestemt den inverse til koeffisientmatrisen kan vi løse likningssystemet på denne måten:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Legg merke til at vi multiplisere fra *venstre* med den inverse matrisen. Vektoren x inneholder verdiene av de ukjente.

▼

Eksempel 3.7

Løs likningssystemet

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + x_2 & & = & 3 \\ 3x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 5 \end{array}$$

ved å regne med matriser.

Løsning

Vi kan skrive likningssystemet på vektor-matriseform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Når vi regner ut den inverse til koeffisientmatrisen (bruk gjerne MATLAB eller kalkulator), får vi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hvis vi multipliserer begge sider av likningen fra venstre med den inverse til koeffisientmatrisen, får vi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette viser at løsningen på likningssystemet er

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

■

Metoden i eksempel 3.7 kan vi bruke til å løse store likningssystemer som kan ha hundrevis av ukjente. Det er imidlertid mer effektivt å bruke Gauss-Jordan eliminasjon, da det krever færre beregninger.

Å løse mange likninger på én gang

Noen ganger kan det hende at vi må løse vektor-matriselikningen $Ax = b$ mange ganger med den samme koeffisientmatrisen, men med forskjellige vektorer b. Det kan for eksempel forekomme dersom vi skal belaste en og samme konstruksjon med forskjellige laster. Da vil koeffisientmatrisen avhenge av hvordan konstruksjonen ser ut, og vektoren b vil inneholde forskjellige laster.

For å slippe å gjøre de samme utregningene mange ganger, kan vi bruke matriseregning. Da lager vi en matrise X der hver av søylene er løsningen for ett bestemt valg av koeffisienter b på høyre side av likningen. De forskjellige valgene av koeffisienter lar vi være søyler i en matrise B.

Dersom vi har tre likninger med tre ukjente, og to sett med koeffisienter, kan vi skrive dette slik :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Vi skriver likningssystemene slik:

$$AX = B$$

Hvis A er invertibel, kan vi løse likningene slik:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Et konkret eksempel kan se slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Siden det er 3 søyler i B-matrisen på høyre side av likhetstegnet, og det er 2 rader i matrisene, løser vi her 3 likningssystemer, hvor hvert av dem består av 2 likninger med 2 ukjente. Det første likningssystemet er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

der vi ser at koeffisientene på høyre side er 2 og 5. I det neste systemet er koeffisientene 1 og 7, og i det siste er de 3 og 1.

Når vi regner ut matrisen $X = A^{-1}B$ vil vi få en 2×3-matrise der hver søyle er en løsning av et av likningssytemene. Vi får:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ \frac{1}{2} & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at:

$$x_1 = 1,\ y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 5,\ y_2 = -2, \quad x_3 = -5,\ y_3 = 4$$

3.4.6 Å regne ut den inverse matrisen ved å bruke MATLAB

MATLAB-tips 3.7

MATLAB har selvsagt en innebygd funksjon for å regne ut den inverse til en matrise. Nedenfor viser vi hvordan vi kan regne ut den inverse til 2×2- og 3×3-matriser.

```
clear all
>> A=[ 1 2 ; 3 4 ]
A =
     1     2
     3     4

>> inv(A)
ans =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000


>> B=[ 1 0 2 ; -1 1 3 ; 0 3 2 ]
B =
     1     0     2
    -1     1     3
     0     3     2
```

```
>> inv(B)
ans =
    0.5385   -0.4615    0.1538
   -0.1538   -0.1538    0.3846
    0.2308    0.2308   -0.0769
```

Hvis matrisen vi jobber med ikke har en invers, gir MATLAB oss en feilmelding:

```
>> clear all
>> A=[ 1 3 ; 4 12 ]
A =
     1     3
     4    12

>> inv(A)
Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =
   Inf   Inf
   Inf   Inf
```

Det er en nokså omstendelig prosess å beregne inverse matriser med papir og blyant, og muligheten for å regne feil, er stor. Derfor vil vi som regel bruke MATLAB, kalkulator eller andre dataverktøy for å regne ut inverse matriser.

Nedenfor har vi illustrert algoritmen vi har brukt for å regne ut den inverse til en matrisen, men vi har brukt MATLAB. Husk at det går an å lage 3×3-enhetsmatrisen med kommandoen "eye(3)". I rammen nedefor har vi også brukt kpmmandoen "inv(A)" for å kontrollere utregningen av den inverse.

```
>> A=[1 0 1 ; 2 1 0 ; 0 1 1]
A =
     1     0     1
     2     1     0
     0     1     1

>> C = [A eye(3)]
C =
     1     0     1     1     0     0
     2     1     0     0     1     0
     0     1     1     0     0     1

>> rref(C)
ans =

    1.0000         0         0    0.3333    0.3333   -0.3333
         0    1.0000         0   -0.6667    0.3333    0.6667
         0         0    1.0000    0.6667   -0.3333    0.3333
```

```
>> inv(A)

ans =

    0.3333    0.3333   -0.3333
   -0.6667    0.3333    0.6667
    0.6667   -0.3333    0.3333
```

I rammen nedenfor har vi illustrert hvordan vi kan løse likningssystemer, blant annet ved å bruke den inverse til koeffisientmatrisen. Forklar hvordan likningssystemet ser ut, og forklar hva som skjer i de forskjellige linjene.

```
>> A=[1 0 1 ; 2 1 0 ; 0 1 1]
A =
     1     0     1
     2     1     0
     0     1     1

>> b=[1 ; 2 ; 3]
b =
     1
     2
     3

>> inv(A)*b
ans =
     0
     2
     1

>> rref([A b])
ans =
     1     0     0     0
     0     1     0     2
     0     0     1     1
```

3.5 Determinanter

Når vi har lært å regne ut determinanter har vi fått en metode til å avgjøre om en matrise er invertibel, uten å forsøke å regne ut den inverse. *Determinanter er definert for kvadratiske matriser.*

Determinanten til en matrise er et tall. Dette tallet forteller oss om matrisen er invertibel eller ikke.

3.5.1 Definisjon av determinant

Determinanten til en 2×2-matrise er definert slik:

DEFINISJON 3.2

Hvis 2×2-matrisen A er $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så er **determinanten** til A definert ved uttrykket:

$$\det A = |A| = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Definisjonen viser oss hvordan vi skriver determinanten til en matrise. I denne boka skal vi bruke loddrette streker når vi skriver en determinant:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

.

Determinanten til matriser som er større enn 2×2-matriser blir definert *induktivt*. Det vil si at vi for en bestemt matrise må kunne regne ut determinanter til matriser som er mindre. Skal vi regne ut determinanten til en 3×3-matrise, må vi kunne regne ut determinanten til en 2×2-matrise. Skal vi regne ut determinanten til en 4×4-matrise, må vi kunne regne ut determinanten til en 3×3-matrise, osv.

I definisjonen av determinanten til en 2×2-matrise ser vi at det er 2 ledd. Leddene har forskjellige fortegn. Når vi regner ut determinanten til større matriser, vil leddene også ha forskjellige fortegn. Fortegnet til hvert ledd i utregningen følger et "sjakkbrettmønster" gjennom matrisen. Vi starter med $+$ oppe i venstre hjørne og bytter fortegn for hvert steg vi tar bortover i en rad og nedover i en søyle. Mønsteret ser slik ut i en 4×4-matrise:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Eksempelet nedenfor viser hvordan vi regner ut determinanten til en 3×3-matrise.

▼

Eksempel 3.8

Regn ut determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Løsning

Vi velger "å utvikle" determinanten etter rad 2. Grunnen er at denne raden inneholder en null, noe vi skal se sparer oss for arbeid.

Vi "holder over" rad 2 og søyle 1. Da står vi igjen med 2×2-determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Tallet vi holder over er 4, og fortegnet skal i henhold til "sjakkbrettmønsteret" være minus.

Vi går videre i rad 2, og holder over rad 2 og søyle 2. Da står vi igjen med determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Tallet vi holder over er 5, og fortegnet skal være pluss.

Vi går så videre i raden, og holder over rad 2 og søyle 3. Da står vi igjen med determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Tallet vi holder over er 0, og fortegnet er minus.

Determinanten til en 3×3-matrise er definert ved en sum på denne måten:

$$|A| = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Legg merke til fortegnene vi har foran tallene 4, 5 og 0. Legg også merke til hvilke tall som inngår i determinanten som står etter disse tallene, og hvordan disse samsvarer med en "hold-over-regel". Grunnen til at vi valgte rad 2, er at den inneholder en null på plass a_{23}. Det gjør det siste produktet lik null, og vi slipper å regne ut den siste 2×2-determinanten.

Gjennomfør utregningen ved å bruke definisjonen av determinanten til en 2×2-matrise, og vis at $|A| = -30$.

■

Metoden vi bruker for å regne ut determinanten til en matrise kan oppsummeres slik, se eksempel 3.8:

1. Velg en rad eller en søyle i matrisen. Jo flere null-er det er i raden eller søylen, desto mindre arbeid blir det.
2. Finn ut hvilket fortegn elementet lengst til venstre i raden har ut fra sjakkbrettmønsteret. (Hvis vi velger å utvikle determinanten etter en søyle, starter vi med det øverste elementet. I den videre beskrivelsen antar vi at vi "utvikler" determinanten etter en rad.)

3. Hold over raden og søylen der det første elementet står. Multipliser det første elementet (med riktig fortegn) med determinanten til matrisen som står igjen når du holder over raden og søylen.

4. Gå til neste element i raden, gjenta prosessen fra forrige punkt, og legg dette til svaret du fikk i forrige punkt.

5. Gjenta prosessen gjennom hele raden.

Metoden med å bruke "sjakkbrettmønster" og "hold-over-regel" kalles **Kofaktorutvikling**. Vi ser nærmere på det i neste avsnitt.

Orienteringsstoff ✓

3.5.2 Kofaktor og minor

Metoden vi skisserte i forrige avsnitt kan formaliseres. Det gjøres slik som beskrevet nedenfor.

DEFINISJON 3.3

Med ij**-minoren** M_{ij} til en matrise mener vi *determinanten* til den matrisen vi får igjen når vi tar vekk rad i og søyle j i den opprinnelige matrisen.

Siden en determinant er et tall, er også minoren er et *tall*.

M_{11} minoren til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ blir da:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

DEFINISJON 3.4

Med ij**-kofaktoren** til en matrise mener vi ij-minoren til matrisen multiplisert med faktoren $(-1)^{i+j}$. Kofaktoren A_{ij} til matrisen A er altså definert som:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Kofaktoren A_{11} til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ blir da:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 3) = 2$$

En kofaktor er et tall. Kofaktoren gir oss fortegnet vi får når vi bruker "sjakkbrettmønsteret".

Vi kan definere determinanten til en $n \times n$-matrise A ved hjelp av kofaktorene A_{ij}.

DEFINISJON 3.5

Dersom A er en $n \times n$-matrise, er **determinanten** definert ved uttrykket:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots a_{1n}A_{1n}$$

Determinanten til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ blir i henhold til denne definisjonen:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -0 \end{vmatrix} = 42$$

De tre kofaktorene vi har regnet ut her er:

$$A_{11} = 1 \cdot ((-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 3) = 2$$
$$A_{12} = -1 \cdot (4 \cdot (-2) - 3 \cdot 6) = -26$$
$$A_{13} = 1 \cdot (4 \cdot 0 - 6 \cdot (-1)) = 6$$

Vi sier at determinanten i dette tilfellet er *utviklet* etter første rad. Vi kan bruke samme framgangsmåte for å *utvikle determinanten etter en hvilken som helst rad, eller en hvilken som helst søyle.* Dersom det er mange 0'er i en rad eller i en søyle, er det lurt å utvikle determinanten etter den som har flest 0'er. Det gjør utregningen lettere.

Hvis alle matriseelementene i en søyle eller i en rad er lik null, er determinanten lik null.

3.5.3 Å beregne en determinant ved å bruke MATLAB

MATLAB-tips 3.8

Det er enkelt å bergne determinanter ved å bruke MATLAB. Det gjør vi slik:

```
>> A=[ 1 2 3 ; 4 5 0 ; 6 7 8 ]
A =
     1     2     3
     4     5     0
     6     7     8

>> det(A)
ans =
   -30.0000
```

3.5.4 Rad- og søyleegenskaper

I dette avsnittet skal vi "gjøre" noe med en matrise A. Matrisen vi får etter å ha "gjort noe", kaller vi B. Vi skal se hva det vi "gjør" med matrisen har å si for determinanten til matrisen.

Nedenfor skriver vi "rad (søyle)". Det betyr at *det vi kan gjøre med en rad, kan vi også gjøre med en søyle.*

Setning 3.8

1. Bytter vi om to rader (søyler) i en matrise, bytter determinanten fortegn: $|B| = -|A|$.
2. Hvis det er to like rader (søyler) i en matrise, er determinanten lik null.
3. Determinanten til en matrise A er lik determinanten til den transponerte til A: $|A| = |A^T|$.
4. Hvis vi ganger alle elementene i én rad (søyle) i en matrise med k, er $|kA| = k\,|A|$. (Her lar vi $|kA|$ bety at vi ganger k inn på én rad (søyle) i matrisen A.)

   Omvendt kan vi si: Har alle elementene i en rad (søyle) i en determinant en felles faktor, kan vi sette denne faktoren foran determinanten.
5. Hvis vi adderer et multiplum av en rad (søyle) til en annen rad (søyle), endrer ikke determinanten verdi.

   Dette betyr at vi kan utføre *elementære radoperasjoner* på en determinant, uten at determinanten endrer verdi.
6. Anta at $A_1,\ A_2$ og B er like matriser, bortsett fra rad nummer i. Anta at rad i i B er summen av rad i i A_1 og A_2. Da er $|B| = |A_1| + |A_2|$.

   Matrisene $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er eksempler på slike matriser. I disse er rad 1 forskjellige.

Legg merke til at bruk av egenskap nr. 5 kan gjøre utregningen av determinanter enklere for oss.

▼

Eksempel 3.9

Regn ut determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ved å gjøre elementære radoperasjoner på determinanten først.

Løsning

Husk at dersom vi klarer å gjøre elementære radoperasjoner slik at der blir mange null'er i en determinant, vil beregningen av determinanten bli enklere.

Vi ser lett (?) at det kan være lurt å legge sammen rad 1 og rad 2, og erstatte rad 2 med det svaret vi da får. Dette gir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 9$$

Målet med å bruke elementære radoperasjoner *før* vi begynner å regne ut en determinant er å få så mange 0'er som mulig i en rad eller søyle. Er det mange 0'er i en rad eller søyle, blir mange av produktene vi må regne ut 0, og det letter regningen.

■

Egenskapene nr. 4 og nr. 2 kan også lette oss i utregningene av determinanter. Nedenfor viser vi et eksempel på det.

▼

Eksempel 3.10

Regn ut determinanten til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 15 & 1 \\ -3 & -6 & 12 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

Løsning

Vi ser at dersom vi multipliserer rad 1 med -3, får vi rad 3. Matrisen vi får når vi multipliserer rad 1 med -3 kaller vi B. Matrisen B har altså to like rader, og da vet vi at determinanten til B er lik null. Vi kan skrive dette slik:

$$|B| = k|A| = 0, \quad k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0$$

Kunsten er å "se" om det går an å få til 2 like rader eller søyler i determinanten. Ser vi det, vet vi at determinanten er lik null. Vi bør defor ta et overblikk over determinanten *før* vi begynner å regne.

■

3.5.5 Determinanten til en triangulær matrise

Hvis vi regner ut determinanten til den øvre triangulære matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, får vi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 8$$

Vi ser at determinanten til A er lik produktet av diagonalelementene.
Generelt gjelder dette for en øvre eller nedre triangullær matrise:

Setning 3.9

Determinanten til en triangulær matrise A er lik produktet av diagonalelementene til A.

For å vise at dette stemmer, er det nok å bruke reglene for hvordan vi regner ut determinanter på en triangulær matrise. Legg merke til at dersom et av diagonalelementene i en triangulær matrise er lik null, er determinanten til matrisen lik null.

▼

Eksempel 3.11

Regn ut determinanten til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Løsning

Matrisen A er triangulær. Derfor regner vi ut determinanten ved å multiplisere sammen diagonalelementene:

$$|A| = 1 \cdot 4 \cdot (-2) = -8$$

Vi får det samme svaret hvis vi bruker den vanlig metoden for å regne ut determinanter. Det er mest lønnsomt å utvikle determinanten etter første søyle eller tredje rad.

■

3.5.6 Determinant og invers matrise

En viktig setning om invertible matriser er:

Setning 3.10

En $n \times n$-matrise A er invertibel hvis og bare hvis $|A| \neq 0$

Dette ser vi stemmer godt med uttrykket vi fant for den inverse til 2×2-matriser. Der fant vi at

$$\text{Hvis } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ er } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vi ser at den inverse eksisterer bare dersom $ad-bc \neq 0$. Men vi ser at $ad-bc = |A|$, og det er i samsvar med setningen over.

Vi kan nå utvide listen over ekvivalente utsagn som vi skrev opp i avsnitt 3.4.4. Det går an å vise at disse utsagnene er ekvivalente:

Setning 3.11

1. A er invertibel
2. $|A| \neq 0$
3. Likningen $Ax = b$ har bare én løsning
4. Likningen $Ax = 0$ har bare den trivielle løsningen
5. Hvis vektorene $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ er søylene i matrisen A, er vektorene lineært uavhengige.
6. A er radekvivalent med identitetsmatrisen med samme størrelse

Vi har sett på lineær uavhengigeht i avsnitt 2.8. Vi skal arbeide mer med dette i avsnitt 5.2.

Av punktene i denne listen skal vi spesielt merke oss dette:

1. *Den enkleste måten å avgjøre om en matrise er invertibel, er å regne ut determinanten.* Gjør det til en vane å sjekke om determinanten til en matrise er lik null *før* du begynner å regne ut den inverse. Det kan spare deg for mye arbeid.

2. *Et lineært likningssystem med n likninger og n ukjente har en entydig løsning hvis og bare hvis determinanten til koeffisientmatrisen er forskjellig fra null.*

Vi skal også merke oss at disse setningene er ekvivalente dersom vi skriver *ikke* i alle sammen. Dette kalles å ta **negasjonen** til hvert av utsagnene. Vi kan for eksempel si at dersom $|A| = 0$ så har *ikke* likningssystemet $Ax = b$ bare én løsning. At systemet "ikke bare har én løsning", betyr at det enten er ingen løsninger, eller at det er uendelig mange.

▼

Eksempel 3.12

Undersøk om likningssystemet

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 3 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 5 \end{array}$$

bare har én løsning, uten å løse likningssystemet.

Løsning

Likningssystemet har koeffisisentmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Når vi regner ut determinanten får vi $|A| = -15$. Siden $|A| \neq 0$, har likningssystemet bare én løsning.

■

▼

Eksempel 3.13

Undersøk om likningssystemet

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 3 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 6 \end{array}$$

bare har én løsning.

Løsning

Koffisientmatrisen til likningssystemet er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Når vi studerer radene 1 (R_1) og 4 (R_4), ser vi at $R_4 = 2 \cdot R_1$. Hvis vi kaller matrisen vi får når vi multipliserer første rad med 2 for B, vet vi at $|B| = 2|A|$. Siden B har to like rader, er $|B| = 0$. Da er også $|A| = 0$. Siden $|A| = 0$, har likningssystemet ikke bare én løsning. I dette tilfellet er det uendelig mange løsninger. (Hvordan kan vi vite at det er uendelig mange løsninger, og at svaret ikke skal være "ingen løsninger"?)

■

▼

Eksempel 3.14

I avsnitt 2.8 så vi at vektorene $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ var *lineært uavhengige* dersom likningssystemet $x_1\, v_1 + x_2\, v_2 + \cdots + x_n\, v_n = 0$ bare hadde den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$

Bruk setning 3.11 til å undersøke om vektorene er lineært uavhengige:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Løsning

For å undersøke om vektorene er lineært uavhengige, skal vi undersøke om likningssystemet $x_1\, v_1 + x_2\, v_2 + \cdots + x_n\, v_n = 0$ bare har den trivielle løsningen. Men likningssystemet kan skrives på vektor-matriseform:

$$x_1\, v_1 + x_2\, v_2 + \cdots + x_n\, v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

I følge setning 3.11 vil likningssystemet ha den trivielle løsningen hvis, og bare hvis, $|A| \neq 0$, s punkt 2 og 4. Utvikler vi determinanten om rad 2, ser vi at $|A| = -1 \neq 0$. Altså er de tre vektorene lineært uavhengige.

■

3.5.7 Determinanten til et matriseprodukt

La oss se hvilke svar vi får når vi regner ut produktet av determinantene til to matriser A og B, og sammenlikner svaret med determinanten til $C = AB$:

```
>> A=[1 2 ; 3 4]
A =
     1     2
     3     4
```

```
>> B=[1 1 ; 4 5]
B =
     1     1
     4     5

>> C=A*B
C =
     9    11
    19    23

>> det(A)*det(B)
ans =
    -2

>> det(C)
ans =
   -2.0000
```

Vi ser at $|A| \cdot |B| = |A\,B| = -2$. Dette er et eksempel på en generell regel som si at at for kvadratiske matriser gjelder at determinanten til et produkt av to matriser er lik produktet av determinantene til hver av matrisene:

$$|AB| = |A||B|$$

Hvis A og B er inverse matriser, det vil si at $B = A^{-1}$, får vi:

$$|AB| = |I| = 1 = |A| \cdot |B|$$

Altså ser vi at:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3.5.8 Cramers regel

Orienteringsstoff ✓

Cramers regel blir brukt til å løse likningssystemer. Vi går ikke næremere inn på Cramers regel her, men skriver bare opp regelen.

Setning 3.12

Vi kan regne ut den ukjente x_i i likningssystemet $Ax = b$ ved å

1. erstatte søyle nummer i i matrisen A med søylevektoren b og kalle den nye matrisen B
2. regne ut x_i ved å regne ut brøken

$$x_i = \frac{|B|}{|A|}$$

Prosedyren brukes så på hver av de ukjente $x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n$ i likningssystemet.

▼

Eksempel 3.15

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

ved å bruke Cramers regel.

Løsning

Cramers regel sier at vi skal erstatte første søyle i koeffisientmatrisen med søylen $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ når vi skal regne ut x. Cramers regel gir:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Tilsvarende får vi når vi regner ut y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

Kontroller at svaret stemmer.

■

3.5.9 Invers og adjungert matrise

Orienteringsstoff ✓

Når vi skal regne ut den inverse til en matrise, skal vi nøye oss med å bruke metoden vi lærte i avsnitt 3.4.2. Nedenfor er det allikevel gjengitt en oversikt over en annen metode som det også går an å bruke.

Når vi skal regne ut den inverse til matrisen A, skal vi regne ut en matrise X som er slik at:

$$AX = I$$

Å bestemme den inverse matrisen vil altså si å løse denne likningen.

Hvis A er en invertibel, kvadratisk matrise, kan vi finne den inverse ved uttrykket:

$$A^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{|A|}$$

Her er $[A_{ij}]$ **kofaktormatrisen** (se nedenfor) A_{ij} til A , og $|A|$ er determinanten.

Kofaktormatrisen er den matrisen vi får dersom vi setter opp kofaktorene (se avsnitt 3.5.2) til matrisen i en ny matrise. Den transponerte av kofaktormatrisen kalles den **adjungerte** matrisen til A, og skrives $\operatorname{adj} A = [A_{ij}]^T$.

Dersom $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, er kofaktorene:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4 & \qquad A_{12} &= -3 \\ A_{21} &= -2 & \qquad A_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Kofaktormatrisen er altså $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at $|A| = 4 - 6 = -2$. Da blir den inverse matrisen:

$$A^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{|A|} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vi kan sjekke at dette faktisk er den inverse matrisen ved å multiplisere den med A. Da får vi enhetsmatrisen.

Kapittel 4

Lineære transformasjoner

Fra tidligere kjenner vi begrepet **funksjon**:

En funksjon er en regel som til én verdi x av den variable tilordner én - og bare én - verdi y.

Vi har arbeidet med funksjoner der både x og y er relle tall. Vi er også fortrolige med skrivemåten $y = f(x)$. Vi skal nå se på funksjoner der x og y ikke er reelle tall, men vektorer.

4.1 Om transformasjoner

I dette kapitlet skal vi se på en type funksjoner som vi kaller **transformasjoner**. (Ordene **avbildning** og **funksjon** blir også brukt.) Vi skal ta for oss transformasjoner mellom "rommene" $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. Det betyr at transformasjonen "tar" en vektor med n rader og reelle komponenter ($\mathbb{R}$'en forteller at det er reelle tall), og overfører til *en annen vektor* med m rader, som også har reelle komponenter. Det er ingen ting i veien for at $m = n$.

Et eksempel på en transformasjon kan være en regel som overfører en vektor $x = (x_1, x_2)$ i planet til en annen vektor $y = (x_1, 0)$. Hvis vi kaller transformasjonen T (akkurat som vi kaller en funksjon f), kan vi skrive dette slik:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrisk betyr det en vektor i planet blir "overført" til en ny vektor med samme førstekomponent, men som ligger langs førsteaksen. Transformasjonen "tar" en vektor i det to-dimensjonale rommet (som vi skriver $\mathbb{R}^2$) og overfører den til en annen vektor i det to-dimensjonale rommet ($\mathbb{R}^2$).

Et eksempel på en annen transformasjon kan være en regel som overfører en vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ i rommet $\mathbb{R}^3$, til en vektor $y(x_1, x_2)$ i planet $\mathbb{R}^2$. Kaller vi transformasjonen T, kan vi skrive:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forklar med ord hva denne transformasjonen "gjør".

Alle vektorene transformasjonen kan virke på, kaller vi **definisjonsmengden**. Definisjonsmengden inneholder altså alle de vektorene x som vi kan "sette inn i" uttrykket for avbildningen. Alle de mulige vektorene vi får ut av transformasjonen, kaller vi **bildet** (engelsk: *image*) eller **verdimengden**. Vi sier også at vi kan bestemme **avbildningen** til en bestemt x i verdimengden. Med det mener vi at vi skal bestemme $T(x)$.

I denne boka skal vi bare se på transformasjoner som er *lineære*. Vi definerer en lineær transformasjon på denne måten:

DEFINISJON 4.1

En **lineær transformasjon** T fra et vektorrom (se kapittel 5) V til et vektorrom W er en regel som til alle vektorer x i V tilordner én, og bare én, vektor $T(x)$ i W.
Transformasjonen må ha disse egenskapene:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ for alle u og v i V
2. $T(au) = a\,T(u)$ for alle u i V og for alle skalarer a

   De to punktene kan slås sammen til ett.

3. En transformasjon T er lineær hvis og bare hvis

$$T(au+bv) = a\,T(u) + b\,T(v)$$

La oss se på et eksempel som viser hvordan vi kan vise at en transformasjon T er lineær.

▼

Eksempel 4.1

Vis at transformasjonen som projiserer et punkt (x, y, z) i rommet $\mathbb{R}^3$ loddrett ned i xy-planet i $\mathbb{R}^3$ er en lineær transformasjon.

Løsning

Transformasjonen som projiserer et punkt i rommet ned i planet, må være slik at x- og y-koordinatene er konstante, mens z-koordinaten blir null etter transformasjonen. Transformasjonen virker på en vektor i $\mathbb{R}^3$ og gir oss en ny vektor i $\mathbb{R}^3$ med z-komponent lik null. Vi kan skrive dette slik:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi må kontrollere at de to betingelsene i definisjonen av en lineær transformasjon er oppfylt. Vi bruker de kjente reglene for addisjon av vektorer og for multiplikasjon av en vektor med en skalar og får:

1.

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

2.

$$T\left(\begin{bmatrix} ax_1 \\ ay_1 \\ az_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ay_1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = a\,T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right)$$

Dette viser at transformasjonen er lineær.

■

4.2 Lineære transformasjoner og matriser

Det går an å vise at *lineære* transformasjoner kan beskrives som en multiplikasjon mellom en matrise A og en vektor x. Kaller vi transformasjonen T skriver vi dette slik:

$$T(x) = A\,x$$

Hvis vi ser på transformasjonen

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ser vi at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"gjør" det samme som T fordi

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi sier at matrisen A er **matrisen til transformasjonen** T, eller at matrisen A **representerer transformasjonen** T. Noen ganger bruker vi ordet **transformasjonsmatrisen** til T. Hvordan vi bestemmer matrisen A i praksis, skal vi se på i avsnitt 4.2.4.

Dersom matrisen A har størrelse $m \times n$ og (søyle)vektoren x har størrelse $n \times 1$, blir Ax en vektor med størrelse $[m \times n] \times [n \times 1] = m \times 1$. Transformasjonen $T(x) = Ax$ avbilder ("overfører") da en vektor med n komponenter til en med m komponenter. T er da en transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.

Nedenfor skal vi se på noen eksempler på transformasjonen $T(x) = Ax$ der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi skal la definisjonsmengden til T være alle (søyle)vektorer $x = (x_1, x_2)$, det vil si alle vektorer i planet.

For å gjøre skrivemåten litt enklere, vil vi mange ganger skrive $T(x) = T(x_1,\ x_2)$ når vi anvender transformasjonen T på vektoren $(x_1,\ x_2)$, i stedet for det mer korrekte $T((x_1,\ x_2))$. Vi vedtar altså disse likhetene:

$$T(x) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T((x_1,\ x_2)) = T(x_1,\ x_2)$$

Skrivemåten $T(x_1,\ x_2)$ bruker vi når det ikke er tvil om hva vi mener.

4.2.1 Å bestemme avbildningen av en vektor

Med matrisen A definert som over, kan vi for eksempel bestemme avbildningen av vektoren $x = (1,\ 2)$. Det gjør vi ved å regne ut Ax:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Geometrisk betyr dette at punktet (1, 2) avbildes på punktet (5, 7).

For et vilkårlig punkt (x_1, x_2) finner vi:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ x_1 + 3\,x_2 \end{bmatrix}$$

I stedet for å oppgi transformasjonen som en matrise, kan vi altså skrive den som en formel slik:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ x_1 + 3\,x_2 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Å bestemme hvilken vektor som avbildes på en bestemt vektor

Vi snur problemstillingen fra forrige avsnitt rundt, og spør istedet etter hvilken vektor som avbildes på en gitt vektor. La oss for eksempel finne ut hvilken vektor som avbildes på vektoren $y = (0,\ -1)$. La oss kalle denne ukjente vektoren $x = (x_1,\ x_2)$. Da skal vi altså bestemme x_1 og x_2 slik at $T(x_1, x_2) = (0,\ -1)$. Vi skal med andre ord løse likningen:

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ x_1 + 3\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at vi skal løse likningssystemet

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & = & -1 \end{array}$$

Svaret blir $x_1 = 2, \quad x_2 = -1$. Det betyr at det er vektoren $x = (2,\ -1)$ som avbildes på vektoren $y = (0,\ -1)$. Dette kunne vi også ha funnet ut ved å løse en matriselikning:

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Her har vi brukt standard framgangsmåte for å bestemme den inverse matrisen A^{-1}.

4.2.3 Å avgjøre om en vektor er med i verdimengden

Hvordan skal vi gå fram for å finne ut om en vektor c hører med i verdimengden til en bestemt transformasjon? Det vi må gjøre er å undersøke om det fins en vektor x i definisjonsmengden til transformasjonen T som er slik at $Ax = c$. Som vi ser betyr dette at vi skal løse likningssystemet

$$Ax = c$$

Vi vet at dette likningssystemet har nøyaktig én løsning dersom determinanten til A er forskjellig fra null: $|A| \neq 0$. Da vet vi også at A er invertibel. Vi kan derfor bestemme x ved å regne ut $x = A^{-1}c$ og så sjekke om den x'en vi finner er med i definisjonsmengden til T.

4.2.4 Å bestemme matrisen til en transformasjon

Vi har sett at en transformasjon kan være bestemt ved en "formel" eller ved en matrise. Her skal vi se et par eksempler på hvordan vi kan bestemme matrisen når "formelen" er oppgitt.

▼

Eksempel 4.2

Bestem en 2×2-matrise A som representerer transformasjonen T gitt ved:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

Løsning

Vi kan bestemme matrisen A ved å omformulere "formelen" for T:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ 0x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at transformasjonen blir representert ved matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

■

Legg merke til at vi i eksempel 4.2 skulle bestemme en 2×2-matrise. Det er en viktig opplysning at størrelsen til matrisen er 2×2, da det i utgangspunktet er uendelig mange matriser som kan beskrive en transformasjon som er gitt ved uttrykket i dette eksempelet. For eksempel vil en $2 \times n$-matrise multiplisert med en $n \times 1$-vektor gi en 2×1-vektor, som er riktig dimensjon på den avbildede vektoren. Det neste eksempelet illustrerer dette.

▼

Eksempel 4.3

I eksempel 4.1 så vi på en transformasjon T der et punkt $(x,\, y,\, z)$ ble avbildet ned i xy-planet på punktet $(x,\, y,\, 0)$. Vi skrev uttrykket for T slik:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi tenker oss nå at transformasjonsn S skal avbilde en vektor i rommet $\mathbb{R}^3$ på en vektor i planet $\mathbb{R}^2$. Da omformulerer vi formelen slik:

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Bestem en matrise A slik at S kan uttrykkes som $S(x) = Ax$.

Løsning

Siden x er en 3×1-matrise og avbildningen av x skal være en 2×1-matrise, må A være en 2×3-matrise for at det skal være mulig å utføre matrisemultiplikasjonen Ax. Vår oppgave blir å bestemme matriseelementene i A. Dersom vi setter:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

får vi:

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dette gir disse likningene:

$$\begin{array}{cccc} ax & +by & +cz & = x \\ dx & +ey & +gz & = y \end{array}$$

Vi ser at løsningen på dette likningssystemet er $a = e = 1,\; b = c = d = g = 0$. Transformasjonen S er altså representert ved matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

4.2.5 Å bestemme en "formel" for transformasjonen når matrisen er kjent

Vi kan også bestemme en "formel" (et uttrykk) for en transformasjon når matrisen til transformasjonen er kjent. Et eksempel viser framgangsmåten.

▼

Eksempel 4.4

Bestem en formel for transformasjonen $T(x) = Ax$ når $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Løsning

Matrisen har størrelse 3×3. Det betyr at vektoren x må ha størrelse 3×1. Transformasjonen avbilder altså en vektor i $\mathbb{R}^3$ på en annen vektor i $\mathbb{R}^3$. "Formelen" for T finner vi ved å multiplisere matrisen A med en vilkårlig vektor med riktig størrelse:

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

■

4.2.6 Standardmatrisen til en lineær transformasjon

La oss ta for oss transformasjonen T bestemt ved uttrykket

$$T(x) = T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi lar vektorene e_1 og e_2 være søylene i enhetsmatrisen $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vil

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A definert ved $A = [\ T(e_1) \ \ T(e_2)\ ]$ kaller vi **standardmatrisen til transformasjonen** T. Standardmatrisen til transformasjonen vi studerte over er altså:

$$A = [\ T(e_1) \ \ T(e_2)\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Når vi kjenner standardmatrisen, har vi nok informasjon til å vite hvor en hvilken som helst vektor blir avbildet. Er T en lineær transformasjon, og

$$x = (x_1,\, x_2) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\, e_1 + x_2\, e_2$$

vil $T(x)$ være:

$$T(x) = T(x_1\, e_1 + x_2\, e_2) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2)$$

Siden standardmatrisen er lagd slik at vi kjenner $T(e_1)$ og $T(e_2)$, kan vi altså regne ut $T(x)$ for alle x. Vi kan selvsagt også regne ut $T(x)$ ved å multiplisere sammen standardmatrisen A med vektoren x:

$$T(x) = A\, x$$

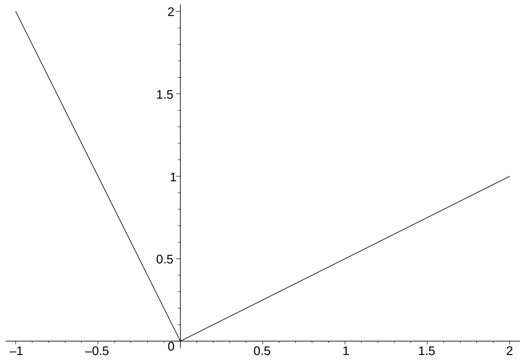
I tabellene i avsnitt 4.3 har vi skrevet opp standardmatrisen til en del transformasjoner.

4.3 Noen spesielle transformasjoner og tilhørende matriser

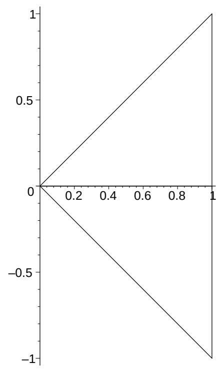
I avsnitt 3.2 så vi hvordan vi kan bruke matriser for å representere speiling og skjærforskyvning. Vi skal nå ta dette opp igjen, og gi en mer samlet framstilling. Vi skal begrense oss til planet i dette avsnittet, det vil si at vi skal arbeide med transformasjoner der et punkt $(x_1,\ x_2)$ i planet blir avbildet på et annet punkt $(x_3,\ x_4)$ i planet. Dette er transformasjoner som vi kan skrive slik:

$$T(x) = T(x_1,\, x_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vi velger her å skrive koordinatsystemet som et x_1x_2-koordinatsystem, i stedet for et xy-koordinatsystem.



Figur 4.1: Linja fra origo til punktet (2, 1) rotert en vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka.



Figur 4.2: Trekanten med hjørner i (0,0), (1,0) og (1,1) blir speilet om x_1-aksen ved at alle punkter i trekanten blir multiplisert med "speilematrisen".

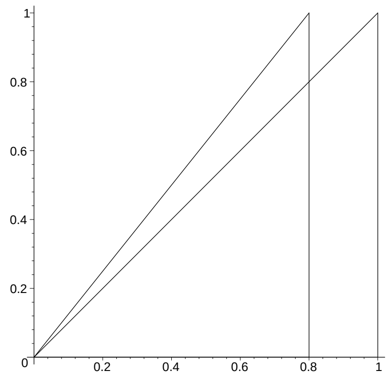
I de følgende avsnittene skal vi skrive opp tabeller som viser hvilke matriser som utfører de forskjellige transformasjonene. For hver transformasjon går det an å lage en tegning som viser hvordan et punkt eller et område i x_1x_2-planet blir transformert. Du bør lage dine egne tegninger for transformasjonene. De bør vise hvordan (for eksempel) en trekant ser ut etter de forskjellige transformasjonene.

Eksempler på hva slags figurer du kan lage er vist i figurene 4.1 og 4.2. Figur 4.1 viser hvordan linja fra origo til punktet (2, 1) blir rotert en vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka. Figur 4.2 viser hvordan en trekant blir speilet om x_1-aksen.

4.3.1 Speiling

Speiling vil si at vi lager et bilde av et objekt. Hvert punkt i speilbildet ligger like langt fra aksen, linja, planet eller punktet vi speiler om, som det tilsvarende punktet i objektet.

Transformasjon	Standardmatrise
Speiling om x_1-aksen	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Speiling om x_2-aksen	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Speiling om linja $x_2 = x_1$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Speiling om linja $x_2 = -x_1$	$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Speiling om origo	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



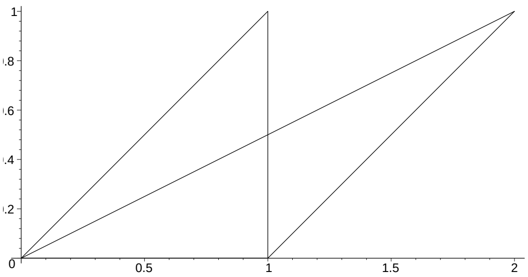
Figur 4.3: Trekanten med hjørner i punktene (0,0), (1,0) og (1,1) skalerert med en faktor $k = 0,80$ i x_1-retning.

4.3.2 Skalering

Skalering vil si at vi forlenger eller krymper et objekt med en viss faktor. Alle punktene i objektet blir skalert like mye i den retningen skaleringen gjøres.

Figur 4.3 viser hvordan trekanten med hjørner i punktene (0, 0), (1, 0) og (1, 1) blir endret når vi skalerer alle punktene i den med en faktor $k = 0,80$ i x_1-retning. Figuren viser at alle punkter blir flyttet med en faktor 0,8 til venstre.

Transformasjon	Standardmatrise
Sammenpressing i x_1-retning	$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < k < 1$
Forlengelse i x_1-retning	$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k > 1$
Sammenpressing i x_2-retning	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad 0 < k < 1$
Forlengelse i x_2-retning	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad k > 1$



Figur 4.4: Trekanten med hjørner i (0,0), (1,0) og (1,1) blir utsatt for skjærkrefter parallelle med x-aksen ved at alle punkter i trekanten blir multiplisert med "skjærmatrisen".

4.3.3 Skjærforskyvning

Skjærforskyvning vil si at vi forskyver et objekt, men at forskyvningen avhenger av hvor langt vekk vi er fra en viss akse: Jo lenger unna aksen, desto større forskyvning.

Figur 4.4 viser hvordan trekanten med hjørner i punktene (0, 0), (1, 0) og (1, 1) blir endret når vi utsetter den for skjærforskyvnking med en faktor $k = 2$.

Transformasjon	Standardmatrise
Skjærforskyvning i x_1-retning mot venstre	$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k < 0$
Skjærforskyvning i x_1-retning mot høyre	$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k > 0$
Skjærforskyvning i x_2-retning nedover	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad k < 0$
Skjærforskyvning i x_2-retning oppover	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad k > 0$

4.3.4 Projeksjon

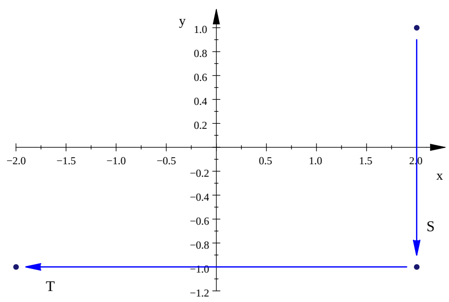
Projeksjon vil si at vi flytter et objekt ned i et plan eller ned på en linje, sånn at hvert punkt i objektet blir flyttet den kortest mulige veien ned på planet eller linja. Dette betyr at vi flytter alle punktene i objektet langs en normal til planet eller linja.

Transformasjon	Standardmatrise
Projeksjon på x_1-aksen	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeksjon på x_2-aksen	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.3.5 Rotasjon

Rotasjon vil si at alle punktene i et objekt beholder sine posisjoner i forhold til hverandre, men at alle linjene vi kan trekke mellom to punkter i objektet roterer om en fastholdt akse. Et eksempel er vist i figur 4.1.

Transformasjon	Standardmatrise
Rotasjon om origo, mot klokka	$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \phi > 0$
Rotasjon om origo, med klokka	$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \phi < 0$



Figur 4.5: Figuren viser hvordan punktet (2, 1) transformeres, først ved speiling om x_1-aksen, deretter ved speiling om x_2-aksen.

4.4 Sammensatte transformasjoner

Transformasjonene vi har beskrevet over kan vi bruke i rekkefølge etter hverandre. Dersom vi for eksempel speiler punktet (2, 1) om x_1-aksen og deretter speiler dette nye punktet om x_2-aksen, vil vi komme til punktet $(-2, -1)$. Det ser vi ganske lett ved å tegne, se figur 4.5.

Dersom vi kaller de to transformasjonene S og T kan vi skrive:

1. Speiling om x_1-aksen: $S: \quad (2,\ 1) \ \rightarrow \ (2,\ -1)$

2. Speiling om x_2-aksen: $T: \quad (2,\ -1) \ \rightarrow \ (-2,\ -1)$

Pila viser hvilket punkt transformasjonen avbilder "startpunktet" på. Dette kan vi også skrive slik:

$$S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Med den **sammensatte transformasjonen** TS mener vi transformasjonen vi får når vi *først* utfører S og *deretter* T. Rekkefølgen vi skriver bokstavene S og T i er altså av betydning! Vi kan skrive:

$$TS\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T(\ S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\ ) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi vet at transformasjonene S og T kan representeres ved matriser. Det viser seg at matrisen som representerer den sammensatte transformasjonen TS er lik produktet av matrisene for hver av transformasjonene. Bruker vi standardmatrisene i avsnitt 4.3, kan vi se dette ved direkte utregning:

$$S(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = y$$

$$T(y) = By = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = z$$

$$(BA)x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = z$$

Dette kan vi skrive kompakt slik:

$$S(x) = Ax, \quad T(x) = Bx \quad \Rightarrow \quad TS(x) = (BA)x = BAx$$

Matrisen som representerer transformasjonen TS er altså matrisen BA. Legg merke til at vi *må* multiplisere matrisene for de to transformasjonene i riktig rekkefølge.

▼

Eksempel 4.5

Matrisen for speiling om x_1-aksen (transformasjonen S), kaller vi A. Matrisen for speiling om x_2-aksen (transformasjonen T), kaller vi B. Matrisen for speiling om origo kaller vi C.

Vis at transformasjonen TS svarer til speiling om origo ved å sammenlikne matrisen for TS med matrisen C.

Løsning

Vi finner matrisene for de forskjellige transformasjonene i avsnitt 4.3. Der ser vi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ved å multiplisere sammen A og B ser vi at:

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = C$$

Altså vil speiling om x_1-aksen etterfulgt av speiling om x_2-aksen svare til speiling om origo siden matrisen for den sammensatte transformasjonen er lik matrisen for speiling om origo.

■

▼

Eksempel 4.6

Vis at $AB = BA$ for de to matrisene definert i eksempel 4.5. Gi en geometrisk tolkning av dette resultatet.

Løsning

Vi vet at det vanligvis ikke er slik at $AB = BA$ når vi multipliserer sammen matriser. Men ved direkte utregning ser vi at $AB = BA = C$ for de to matrisene vi har her.

Geometrisk betyr dette at vi kan bytte om rekkefølgen vi speiler i. Vi kan først speile om x_2-aksen og deretter om x_1-aksen, og da kommer vi til det samme punktet.

■

▼

Eksempel 4.7

Transformasjonen S skalerer alle punkter med en faktor 2 i x_2-retning. Transformasjonen R roterer alle punkter en vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka.

a. Bestem matrisen til transformasjonen P som først skalerer alle punkter en faktor 2 i x_2-retning, og deretter roterer alle punkter en vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka.

b. Regn ut hvor punktet (1, 1) blir transformert av P.

c. Vil punktet (1, 1) havne på samme sted dersom vi bytter om rekkefølgen på S og R?

Løsning

Her kan vi bruke informasjon fra avsnitt 4.3 for å bestemme transformasjonene til skaleringen og rotasjonen.

a. Den sammensatte transformasjonen representeres av en matrise som er lik produktet av matrisene til transformasjonene den er satt sammen av. Vi får:

$$P = RS = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Vi multipliserer vektoren x fra origo til punktet (1, 1) med matrisen P og får:

$$Px = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at punktet (1, 1) transformeres til punktet (−1, 2). Dette kan vi også se ved å lage tegninger som viser hvordan de to transformasjonen flytter punktet.

c. For å sjekke om punktet havner på samme sted dersom vi bytter rekkefølgen av de to transformasjonene, kan vi regne ut matrisen SR. Dette gir:

$$P_2 = SR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $RS \neq SR$. Dersfor kan vi slutte at punktet *ikke* havner på samme sted når vi bytter rekkefølgen. Vis at punktet (1, 1) transformeres til punktet (−2, 1).

■

▼

Eksempel 4.8

En lineær transformasjon S speiler et punkt om xy-planet. Det betyr at $S(x,\ y,\ z) = (x,\ y,\ -z)$. Denne transformasjonen er representert ved matrisen A.

En annen transformasjon T er definert ved

$$T(x, y, z) = (x + 2y,\ x + 3y - z,\ 2x + z)$$

Matrisen som beskriver denne transformasjonen kaller vi B.

a. Skriv opp matrisene A og B

b. Vis at matrisen C til den sammensatte transformasjonen ST er:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Løsning

Siden begge transformasjonene går fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, har matrisene som beskriver transformasjonene størrelse 3×3.

a. Vi skriver opp et generelt uttrykk for en 3×3-matrise og multipliserer denne med en generell vektor i $\mathbb{R}^3$. Vi krever at resultatet skal bli vektoren $(x,\ y,\ -z)$. Dette gir:

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

Vi ser at de to vektorene lengst til høyre i forrige uttrykk er like dersom $a = e = 1,\ i = -1$ og de andre konstantene er lik null. Matrisen A er derfor:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrisen B finner vi slik:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x + 3y - z \\ 2x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 0z \\ x + 3y - z \\ 2x + 0y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matrisen B er altså:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Vi finner matrisen til den sammensatte transformasjonen ST ved å multiplisere sammen matrisene A og B. Vi må passe på å gjøre dette i riktig rekkefølge. Når vi skriver ST betyr det at først skal T virke på en vektor x, og deretter skal S virke på vektoren Tx. Det betyr at vi skal regne ut matrisen AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

▼

Eksempel 4.9

Vi definerer to transformasjoner:

S: Speiling om linja $y = x$

R: Rotasjon en vinkel $\phi = \frac{\pi}{2}$ i retning mot klokka om origo

a. Lag en tegning som viser hvor punktet (2, 1) blir transformert dersom vi først anvender transformasjonen S, og deretter transformasjonen R.

Den sammensatte transformasjonen RS er transformasjonen vi får når vi først utfører S og deretter R.

b. Vis at den sammensatte transformasjonen RS speiler punktet $(x,\ y)$ om y-aksen ved å sammenlikne matrisen til RS med matrisen for speiling om y-aksen.

c. Bruk matrisemultiplikasjon til å vise at transformasjonene RS og SR er forskjellige.

Hvilken geometrisk tolkning har dette?

o o O o o

d. Bestem en kvadratisk matrise A som representerer transformasjonen W definert ved uttrykket:

$$W = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

e. Regn ut den inverse til matrisen A

Transformasjonen W avbilder et punkt $(x,\ y,\ z)$ på punktet (0, 3, 2).

f. Bestem punktet $(x,\ y,\ z)$

Løsning

a. Figur 4.6 viser hvordan punktet (2, 1) flyttes av transformasjonen RS.

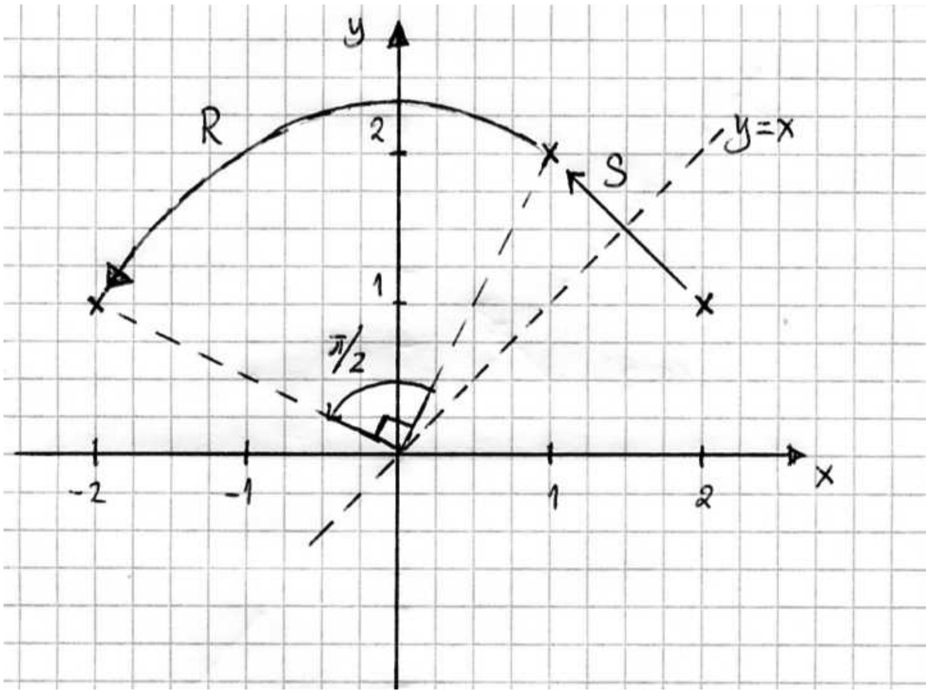
b. Matrisen som beskriver speilingen er

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen som beskriver rotasjonen er

$$A_R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Den sammensatte transformasjonen har matrisen:



Figur 4.6: Speiling S av punktet (2, 1) om linja $y = x$, etterfulgt av rotasjon R en vinkel $\frac{\pi}{2}$ i positiv retning.

$$A_{RS} = A_R A_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at dette er den samme matrisen som speiler om x_2-asken.

c. Vi multiplisere sammen de to matrisene i motsatt rekkefølge og får:

$$RS: \quad A_R A_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad SR: \quad A_S A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at når vi bytter rekkefølgen på transformasjonene, vil ikke punktene komme på samme sted.

d. Vi omformer uttrykket for W og får:

$$W = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matrisen A er da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Ved å bruke Gauss-Jordan-eliminasjon på matrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

slik at venstre halvdel blir lik identitetsmatrisen, får vi:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Radoperasjoner} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Den inverse matrisen er:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Vi vet at $A(x,\ y,\ z) = (0,\ 3,\ 2)$. Vi vet at A har en invers. Da får vi:

$$A(x,\ y,\ z) = (0,\ 3,\ 2) \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}A(x,\ y,\ z) = A^{-1}(0,\ 3,\ 2) = (1,\ -1,\ 2)$$

Punktet som avbildes på (0, 3, 2) er altså (1, −1, 2).

■

Kapittel 5

Basis og vektorrom

Fra før kjenner vi til vektorer i planet og i rommet. Vi har lært hvordan vi regner med søylevektorer av formen $u = (u_1,\ u_2)$ og $v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$. Den første av disse vektorene har 2 **koordinater** (**komponenter**). Den andre vektoren har 3 koordinater.

I dette kapitlet skal vi se at det går an å øke antall koordinater. Det er ikke noe i veien for å ha vektorer med 100-vis av koordinater, men da har vi vansker med å ha et geometrisk bilde av dem.

5.1 Litt om vektorer

Når vi er inne i et rom, kan vi beskrive hvor vi er i rommet ved å oppgi tre koordinater. Koordinatene til et punkt skriver vi $(a,\ b,\ c)$, der a, b og c er relle tall. Tallene kan for eksempel fortelle hvor langt vekk fra et hjørne i rommet vi er, målt langs to vegger og avstanden over gulvet.

I matematikken bruker vi skrivemåten $\mathbb{R}^3$ for å representere det "vanlige" tredimensjonale rommet vi lever i. Her henviser $\mathbb{R}$'en til at det er reelle tall, og 3-tallet viser dimensjonen.

På tilsvarende måte betegner vi planet som $\mathbb{R}^2$. Det består av alle punkter med koordinater $(a,\ b)$.

En **vektor** i $\mathbb{R}^3$ er et ordnet talltrippel (a, b, c). En vektor i $\mathbb{R}^2$ er et ordnet tallpar (a, b).

Vi tenker ofte på en vektor som en pil med en bestemt lengde og retning. Vektoren $\vec{v} = v = (a,\ b,\ c)$ tenker vi på som pila fra origo til punktet $(a,\ b,\ c)$. Vi kan tegne denne pila akkurat der vi ønsker, bare vi beholder lengden og retningen. Vi bruker disse skrivemåtene om hverandre:

$$\vec{v} = v = (a, b, c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Husk at vi bruker skrivemåten *uten* pil bare når det ikke er tvil om at det faktisk er en vektor det er snakk om. Det er stort sett skrivemåten uten pil vi bruker i denne boka.

Fra før kjenner vi flere regneregler for vektorer. Noen av dem er:

1. *Summen og differensen av vektorer:*

$$(1,\,2,\,3)+(0,\,-1,\,2)=(1+0,\,2+(-1),\,3+2)=(1,\,1,\,5)$$

2. *Multiplikasjon av en vektor med en skalar*:

$$4\cdot(1,\,3,\,-1)=(4\cdot 1,\,4\cdot 3,\,4\cdot(-1))=(4,\,12,\,-4)$$

3. *Skalarprodukt (prikkprodukt)*:

$$(1,\,-1,\,3)\cdot(2,\,3,\,-1)=1\cdot 2+(-1)\cdot 3+3\cdot(-1)=2-3-3=-4$$

4. *Vektorprodukt (kryssprodukt) i* $\mathbb{R}^3$:

$$(1,\,2,\,3)\times(4,\,5,\,6)=(2\cdot 6-5\cdot 3,\,-(1\cdot 6-4\cdot 3),\,1\cdot 5-4\cdot 2)=(-3,\,6,\,-3)$$

5. *Lengden av en vektor:*

$$|(1,\,2,\,3)|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

Vi vet også hvordan vi tegner vektorer, og hvordan vi illustrerer reglene ovenfor med tegninger.

De reglene vi har skrevet opp ovenfor, kan generaliseres til å gjelde vektorer med flere enn 3 kooridinater. For eksempel gjelder det at:

$$(1,\,2,\,3,\,4)\cdot(2,\,3,\,4,\,1)=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1=24$$
$$|(1,\,2,\,3,\,4)|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2)}=\sqrt{30}$$

5.2 Lineær uavhengighet

I avsnittene 2.7 og 2.8 diskuterte vi begrepene **lineær kombinasjon** og **lineær uavhengighet**. I resten av dette kapitlet skal vi se nærmere på disse begrepene.

Vi minner om definisjonen av lineær uavhengighet, slik vi skrev den opp i avsnitt 2.8:

a) Vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er **lineært uavhengige** dersom vektorlikningen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$$

bare har den trivielle løsningen, det vil si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

b) Vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er **lineært avhengige** dersom det fins tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ikke *alle* lik null, slik at

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$$

5.2.1 Lineær uavhengighet i planet ($\mathbb{R}^2$)

I dette avsnittet skal vi ta for oss lineær uavhengighet knyttet til vektorer som har 2 komponenter.

Linær avhengighet

I figur 5.1 har vi tegnet to vektorer. De er parallelle, men peker i hver sin retning. Den korteste vektoren er halvparten så lang som den lengste.

Fra tidligere matematikkurs vet vi at multiplikasjon av en vektor v med et tall k betyr at vi forlenger, krymper og/eller snur vektoren:

- Er k positiv, vil vektoren $k\,v$ ha samme retning som v.
- Er k negativ, blir retningen på v og $k\,v$ motsatt.
- Er $|k| > 1$ blir lengden av $k\,v$ større enn lengden av v.
- Er $|k| < 1$, blir lengden av $k\,v$ mindre enn lengden av v.
- Alle vektorer v og $k\,v$ er parallelle.

Disse punktene viser at sammenhengen mellom vektorene i figur 5.1 kan skrives $v = -\frac{1}{2}u$.

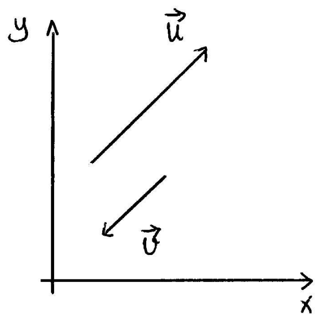
Vi sier at de to vektorene u og v i figur 5.1 er **lineært avhengige** fordi vi kan ”lage” den ene vektoren v ved å ”krympe og snu” den andre vektoren u.

Generelt kan vi uttrykke at to vektorer er lineært avhengige slik:

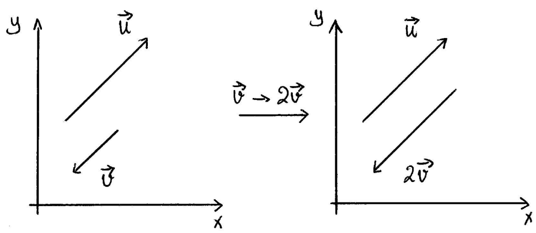
DEFINISJON 5.1

To vektorer u og v i planet $\mathbb{R}^2$ er **lineært avhengige** hvis, og bare hvis, de er parallelle. Dette skriver vi slik:

$$u \text{ og } v \text{ er } \textbf{lineært avhengige} \quad \Leftrightarrow \quad u = kv$$



Figur 5.1: To parallelle vektorer. I dette tilfellet er $v = -\frac{1}{2}u$.



Figur 5.2: Ved å multiplisere v med 2 og legge sammen med u, får vi null-vektoren. Vi har da vist at de to vektorene er lineært avhengige.

Siden vi ønsker å definere lineær avhengighet også for vektorer som ikke ligger i planet, omformer vi uttrykket over. At to vektorer er lineært *avhengige* uttrykker vi vanligvis slik:

DEFINISJON 5.2

To vektorer i planet er **linært avhengige** hvis, og bare hvis, vektorlikningen

$$a\,u + b\,v = \vec{0}$$

fører til at a og b ikke begge to er lik null.

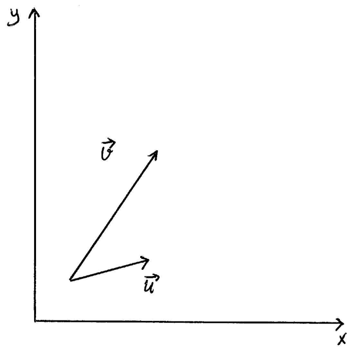
Vi kan tolke uttrykket i rammen geometrisk ved å si at vi kan bruke de to vektorene til å "lage" null-vektoren. Det betyr at vi kan "strekke" vektor u med en faktor a, strekke vektor v med en faktor b, legge sammen de to vektorene vi da får, og komme fram til null-vektoren. Dette har vi illustrert i figur 5.2. Her har vi "strukket" v med en faktor 2. Den er da like lang, men motsatt rettet av u. Når vi legger sammen de to vektorene, får vi null-vektoren.

At uttrykket i definisjon 5.2 er det samme som å si at de to vektorene er parallelle ser vi slik:

$$a\,u + b\,v = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a\,u = -b\,v \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{b}{a}\,v = k\,v, \quad (a \neq 0)$$

Lineær uavhengighet

Hvis vektorene u og v *ikke* er lineært avhengige, sier vi at de er **lineært uavhengige**.



Figur 5.3: To vektorer i planet som ikke er parallelle, er lineært uavhengige.

DEFINISJON 5.3

To vektorer u og v i $\mathbb{R}^2$ er **lineært uavhengige** hvis, og bare hvis, de *ikke* er parallelle. Dette skriver vi slik:

$$u \text{ og } v \text{ er } \textbf{lineært uavhengige} \quad \Leftrightarrow \quad u \neq kv$$

Vi har illustrert dette i figur 5.3. Vi ønsker å skrive dette på en generell form, og får da:

DEFINISJON 5.4

To vektorer i planet er **linært uavhengige** hvis og bare hvis vektorlikningen

$$a\,u + b\,v = \vec{0}$$

fører til at $a = b = 0$. Dette betyr at det *bare* er $a = b = 0$ som oppfyller likningen, og ingen andre verdier enn dette.

Geometrisk betyr dette at to vektorer som er lineært uavhengige, ikke kan "strekkes/krympes" og legges sammen sånn at resultatet blir lik null-vektoren, unntatt hvis begge vektorene gjøres om til nullvektorer ved å multiplisere dem med null ($a = b = 0$). Det betyr også at de *ikke* er parallelle: Når vi legger sammen to vektorer som ikke er parallelle, får vi *ikke* null-vektoren. Det innser vi hvis vi bruker parallellogramregelen for addisjon av vektorer.

▼

Eksempel 5.1

Bruk definisjonene til å vise at vektorene $u = (1,\, 1)$ og $v = (2,\, 3)$ er lineært uavhengige.

Løsning

Vi kan vise at de to vektorene er lineært uavhengige ved å vise at

1. de ikke er parallelle.
2. likningen $a\,u + b\,v = \vec{0}$ bare har den trivielle løsningen $a = b = 0$ til svar.

1.
La oss først vise at vektorene ikke er parallelle.

Hvis vektorene *er* parallelle, kan vi skrive $k\,u = v$, der k er et tall. Skriver vi dette ut, får vi:

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dette er ekvivalent med de to likningene:

$$k \cdot 1 = 2 \quad \text{og} \quad k \cdot 1 = 3$$

Vi ser at den første likningen har $k = 2$ som svar, mens den andre har $k = 3$ som svar. Da har vi vist at det ikke fins *ett* tall k som er slik at $k\,u = v$. Vektorene u og v er ikke parallelle, og derfor er de lineært uavhengige.

2.
La oss nå løse likningen $a\,u + b\,v = \vec{0}$ for å se om den bare har den trivielle løsningen. Vi skriver opp likningen på "vanlig" form, og på vektor-matriseform. Utgangspunktet er likningen:

$$a\,u + b\,v = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Når vi krever at komponentene i vektorene skal være parvis like, får vi:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0 \\ a & + & 3b & = & 0 \end{array}$$

Skrevet på vektor-matriseform får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan løse likningssystemet ved for eksempel å bruke Gauss-Jordan-eliminasjon. Da får vi at $a = b = 0$. Vi konkluderer med at vektorene er lineært uavhengige.

Men vi kan også argumentere på en annen måte. I avsnitt 3.5.6 så vi at utsagnet "likningen $Ax = 0$ har bare den trivielle løsningen" er ekvivalent med utsagnet "determinanten til A er forskjellig fra null".

Ser vi på koeffisientmatrisen til likningen over, ser vi at

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Siden $|A| \neq 0$ kan vi konkludere med at likningen $a\,u + b\,v = \vec{0}$ har løsning $a = b = 0$. Derfor er vektorene u og v lineært uavhengige.

■

La oss nå oppsummere og generalisere det vi lærte i eksempel 5.1.
For å undersøke om to vektorer er lineært uavhengige eller ikke, løser vi likningssystemet:

$$a\,u + b\,v = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

med hensyn på a og b. Verdiene vi finner for a og b forteller oss om vektorene er lineært uavhengige eller ikke.

Hvis vi skriver ut dette likningssystemet, får vi:

$$\begin{array}{ccccc} u_1a & + & v_1b & = & 0 \\ \\ u_2a & + & v_2b & = & 0 \end{array}$$

der a og b er de ukjente. Konklusjonen vi kan trekke når vi har løst dette likningssystemet er:

1. Dersom svaret blir $a = b = 0$, er de to vektorene u og v lineært uavhengige.
2. Er minst én av konstantene a og b forskjellig fra 0, er vektorene u og v lineært avhengige.

I avsnitt 3.5.6 så vi at disse utsagnene er ekvivalente når A er en kvadratisk matrise:

1. Likningen $Ax = 0$ har bare den trivielle løsningen (det vil si at alle x_i'ene er lik 0)
2. Determinanten til A er forskjellig fra null: $|A| \neq 0$

For å avgjøre om de to vektorene er lineært uavhengige, skal vi avgjøre om $a = b = 0$ er den eneste løsningen til likningssystemet, det vil si at likningssystemet bare skal ha den trivielle løsningen. Men det er altså det samme som å si at determinanten til koeffisientmatrisen må være forskjellig fra null.

Hvis vi ser på likningssystemet, ser vi at koeffisientmatrisen er den matrisen som har søylevektorene u og v som søyler. Vi kan skrive denne matrisen slik: $[\,u\;\; v\,]$. Kravet for at søylevektorene $u = (u_1,\; u_2)$ og $v = (v_1,\; v_2)$ skal være lineært uavhengige kan altså skrives:

$$|\,[\,u\ v\,]\,| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi kan trekke følgende konklusjon:

Setning 5.1

Vi har to søylevektorer u og v i planet $\mathbb{R}^2$. Matrisen A er definert ved $A = [\,u\ v\,]$. Vi betrakter vektorlikningen $a\,u + b\,v = \vec{0}$ der a og b er tall.

1. Hvis $a = b = 0$ er eneste mulighet for å oppfylle likningen, er u og v lineært uavhengige.
2. Hvis $|A| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, er vektorene lineært uavhengige.
3. Hvis a og b kan være forskjellige fra null for å oppfylle likningen $a\,u + b\,v = \vec{0}$, er u og v lineært avhengige.
4. Hvis $|A| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$, er vektorene lineært avhengige.

En viktig konsekvens av dette er:

Setning 5.2

Hvis to vektorer i planet er lineært uavhengige, kan *alle* vektorer w i planet uttrykkes ved hjelp av disse to vektorene. Det betyr at det fins tall a og b som er slik at:

$$a\,u + b\,v = w$$

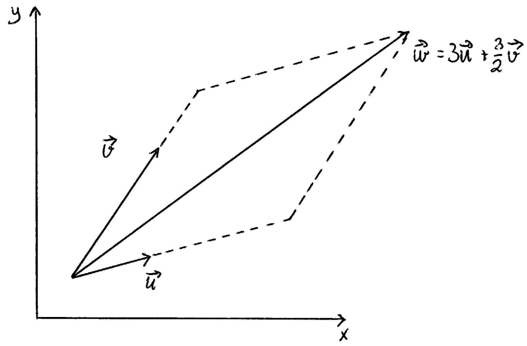
for alle vektorer w i det samme planet.

Vi sier at vektoren w er en **lineær kombinasjon** av de to vektorene u og v. I figur 5.4 er w en lineær kombinasjon av vektorene u og v : $w = 3\,u + \frac{3}{2}\,v$.

▼

Eksempel 5.2

Undersøk om vektorene $u = (1,\ 2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v = (4,\ -3) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ er lineært uavhengige.



Figur 5.4: Vektoren w er en lineær kombinasjon av vektorene u og v. *Alle* vektorer i planet kan skrives som en lineær kombinason av u og v siden de er lineært uavhengige.

Løsning

Vi lager en matrise der søylene er lik disse vektorene skrevet ved siden av hverandre. Deretter regner vi ut determinanten til denne matrisen. Vi får:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = -11 \neq 0$$

Siden $|A| \neq 0$ er de to vektorene lineært uavhengige.

■

▼

Eksempel 5.3

Vis at vektorene $u = (2,\ -3)$ og $v = (-6,\ 9)$ er lineært avhengige.

Løsning

Vi bruker samme framgangsmåte som i forrige eksempel og får:

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - (-3) \cdot (-6) = 0$$

Siden determinanten er lik null, er vektorene lineært avhengige. Vi ser lett (?) at $v = -3u$.

■

▼

Eksempel 5.4

Skriv vektoren $w = (1,\ 4)$ som en lineær kombinasjon av vektorene $u = (1,\ 2)$ og $v = (4,\ -3)$.

Løsning

I eksempel 5.2 så vi at de to vektorene $u = (1,\ 2)$ og $v = (4,\ -3)$ er lineært uavhengige. Da vet vi nå at det er mulig å skrive $w = (1,\ 4)$ som en lineær kombinasjon av u og v. Det betyr at vi kan skrive $a\,u + b\,v = w$:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 4 \end{bmatrix}$$

Oppgaven blir å bestemme a og b slik at likningssystemet

$$\begin{aligned} a + \ 4b &= \ 1 \\ 2a - \ 3b &= \ 4 \end{aligned}$$

er oppfylt. Når vi løser dette likningssystemet får vi:

$$a = \frac{19}{11}, \quad b = -\frac{2}{11}$$

Da ser vi at vi kan skrive vektor w som:

$$w = \frac{19}{11}u - \frac{2}{11}v$$

For å komme fram til svaret, har vi altså måttet løse et likningssystem der koeffisientene a og b er de ukjente.

■

5.2.2 Lineær uavhengighet i rommet ($\mathbb{R}^3$)

I forrige avsnitt innførte vi begrepene lineær avhengighet/uavhengighet for vektorer i planet. Disse begrepene kan vi generalisere til å gjelde for vektorer i rommet. Vi generaliserer altså fra vektorer i $\mathbb{R}^2$ til vektorer i $\mathbb{R}^3$.

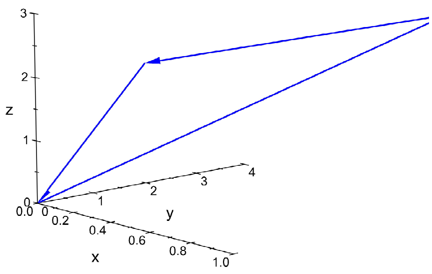
DEFINISJON 5.5

Tre vektorer u, v og w i rommet ($\mathbb{R}^3$) er **lineært uavhengige** hvis, og bare hvis, vektorlikningen $a\,u + b\,v + c\,w = \vec{0}$ bare er oppfylt når $a = b = c = 0$.

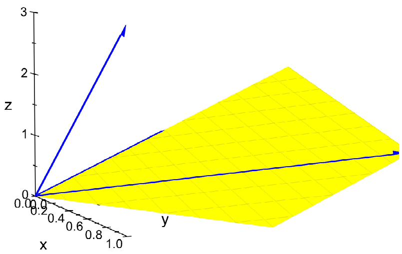
Dette betyr at en av vektorene *ikke* kan "lages" ved å "strekke/krympe" de to andre og legge sammen de vektorene vi da får. Hvis vi hadde fått summen til å bli null uten at a, b og c alle hadde vært lik null, kunne vi for eksempel ha skrevet $u = -\frac{b}{a}\,v - \frac{c}{a}\,w$. Med denne u'en blir $au + bv + cw + = \vec{0}$ selv om a, b og c ikke er lik null.

Hvis det er tilfellet at en av vektorene kan skrives som en lineær kombinasjon av de to andre, er vektorene **lineært avhengige**. Geometrisk betyr dette at de tre vektorene ligger i det samme planet.

De tre vektorene $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ og $v_3 = (1, 4, 3)$ ligger i det samme planet. Ved en passende justering av lengdene deres kan vi legge dem etter hverandre slik at de danner en lukket mangekant, det vil si at summen av dem er lik null. Det har vi vist i figur 5.5 der vi har tegnet vektorene $-v_1$, $-2v_2$ og v_3. Summen $-v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$.



Figur 5.5: Tre lineært avhengige vektorer i rommet kan adderes slik at summen blir lik null. Vektorene kan tegnes slik at de danner en lukket mangekant.



Figur 5.6: De to vektorene $u = (1,\ 2,\ 1)$ og $v = (0,\ 1,\ 1)$ spenner ut et plan, mens vektoren $w = (1,\ 0,\ 3)$ ikke ligger i dette planet.

Setning 5.3

Tre vektorer i rommet ($\mathbb{R}^3$) som ikke er parallelle, er lineært uavhengige hvis, og bare hvis, de *ikke* ligger i det samme planet.

Dette kan vi uttrykke litt upresist slik: To vektorer i $\mathbb{R}^3$ som *ikke* er parallelle, "spenner ut" et plan. Skal vi "komme" vekk fra dette planet ved å legge sammen vektorer, må vi ha én vektor til som ikke ligger i dette planet. Dette har vi illustrert i figur 5.6 der to vektorer spenner ut et plan, og den tredje vektoren ligger utenfor dette planet.

For å avgjøre om de tre vektorene $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ og $w = (w_1, w_2, w_3)$ er lineært uavhengige, kan vi undersøke om likningssystemet

$$a\,u + b\,v + c\,w = \vec{0}$$

bare har løsningen $a = b = c = 0$. Det vil si at vi skal løse likningssystemet

$$\begin{array}{llll} u_1 a & + v_1 b & + w_1 c & = 0 \\ u_2 a & + v_2 b & + w_2 c & = 0 \\ u_3 a & + v_3 b & + w_3 c & = 0 \end{array}$$

med a, b og c som de ukjente, og vise at dette likningssystemet bare har den trivielle løsningen $a = b = c = 0$ som eneste mulige løsning. Fra avsnitt 3.5.6

vet vi at dette er det samme som å si at *determinanten til koeffisientmatrisen er forskjellig fra null.*

Vi kan altså avgjøre om tre vektorer er lineært uavhengige ved å regne ut en determinant der de tre vektorer $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ og $w = (w_1, w_2, w_3)$ er søylene i koeffisientmatrisen. Vi skriver denne matrisen slik: $A = [\, u\ v\ w\,]$.

De tre vektorene er altså *lineært uavhengige* hvis og bare hvis

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Her har vi altså skrevet opp søylevektorene ved siden av hverandre som søylene i en determinant.

Vi kan oppsummere dette slik:

Setning 5.4

De tre vektorer u, v og w er vektorer i rommet $\mathbb{R}^3$. Matrisen A har disse tre vektorene som søyler: $A = [\, u\ v\ w\,]$. Vi betrakter vektorlikningen

$$a\,u + b\,v + c\,w = 0$$

.

1. Hvis $a = b = c = 0$ er eneste mulighet for å oppfylle likningen, er u, v og w lineært uavhengige.

2. Hvis $|A| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$, er vektorene lineært uavhengige.

3. Hvis likningen $a\,u + b\,v + c\,w = 0$ er oppfylt for a, b eller c forskjellig fra 0, er u, v og w lineært avhengige.

4. Hvis $|A| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$, er vektorene lineært avhengige.

En viktig konsekvens av dette er:

Setning 5.5

Hvis tre vektorer i rommet er lineært uavhengige, kan *alle* vektorer t i rommet uttrykkes ved hjelp av disse tre vektorene. Det betyr at det fins tall a, b og c som er slik at:

$$a\,u + b\,v + c\,w = t$$

for en enhver vilkårlig vektor t i det samme rommet.

Vi sier at vektoren t er en **lineær kombinasjon** ev de tre vektorene u, v og w.

La oss se noen eksempler på lineært (u)avhengige vektorer i rommet. Sammenlikn med det vi gjørde da vi arbeidet med vektorer i planet.

▼

Eksempel 5.5

Vis at vektorene $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ og $w = (0, 0, 1)$ er lineært uavhengige.

Løsning

Vi setter opp matrisen der de tre vektorene er søyler og regner ut determinanten. Siden matrisen er øvre triangulær, er determinanten produktet av diagonalelementene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Siden determinanten er forskjellig fra null, er vektorene lineært uavhengige.

Siden de tre vektorene er lineært uavhengige kan en hvilken som helst vektor i rommet skrives som en sum av u, v og w. Vi ser for eksempel at vektoren $x = (2,\ 5,\ 2)$ kan skrives slik:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2u + 3v - w$$

■

▼

Eksempel 5.6

Uttrykk vektoren $x = (4,\ 2,\ -1)$ som en lineær kombinasjon av vektorene $u = (1,\ 1,\ 0)$, $v = (0,\ 1,\ 1)$ og $w = (0,\ 0,\ 1)$.

Løsning

Vi skal bestemme tall a, b og c sånn at vi kan skrive x slik:

$$a\,u + b\,v + c\,w = x$$

Skriver vi opp vektorene som søyler, får vi:

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\cdot 1\\a\cdot 1 + b\cdot 1\\b\cdot 1 + c\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Her må førstekomponenten i vektoren x være lik summen av førstekomponentene i vektorene på venstre side. Det samme gjelder andre- og tredjekomponentene. Dette skriver vi opp som et likningssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot a & + & 0\cdot b & + & 0\cdot c & = & 4\\ 1\cdot a & + & 1\cdot b & + & 0\cdot c & = & 2\\ 0\cdot a & + & 1\cdot b & + & 1\cdot c & = & -1 \end{array}$$

Høyre side i likningssystemet svarer til elementene i vektoren x.

Likningssystemet kan vi for eksempel løse ved å bruke Gauss-Jordan eliminasjon på totalmatrisen. Gjør vi det finner vi:

$$a = 4, \quad b = -2, \quad c = 1$$

Vektoren x kan da skrives slik:

$$x = 4u - 2v + w$$

■

▼

Eksempel 5.7

For hvilke verdier av a er de tre vektorene $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, a-1, 0)$ og $w = (-2, 1, a)$ lineært uavhengige.

Løsning

Vi skriver de tre vektorene opp som søylene i en matrise. Matrisen blir kvadratisk. Vektorene er lineært uavhengige dersom determinanten til denne matrisen er forskjellig fra null. Vi får:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\1 & a-1 & 1\\0 & 0 & a\end{vmatrix} = a^2 - 2a$$

Determinanten er forskjellig fra null når $a \neq 0$ og $a \neq 2$. For alle andre verdier enn $a = 0$ og $a = 2$ er de tre vektorene lineært uavhenginge.

Geometrisk betraktning.
Dersom $a = 0$ er alle tredjekomponentene (z-komponentene) i vektorene like. Det betyr at de tre vektorene ligger i planet $z = 0$. Da er de lineært avhengige.

Dersom $a = 2$ er alle andrekomponentene (y-komponentene) lik 1. Det betyr at de tre vektorene ligger i planet $y = 1$. Dermed er de lineært avhengige.

For alle andre verdier av a vil ikke de tre vektorene være i samme plan, og de er derfor lineært uavhengige.

■

5.2.3 Når er vektorer lineært uavhengige?

I de foregående avsnittene har vi sett på lineært (u)avhengige vektorer i planet $\mathbb{R}^2$ og i rommet $\mathbb{R}^3$. Det er ikke noe i veien for å utvide dette til vektorer i et rom med en hvilken som helst dimensjon.

Nedenfor skriver vi opp en definisjon og et par nyttige setninger. De er en generalisering av det som gjelder for vektorer i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

DEFINISJON 5.6

Hvis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ er n vektorer med $m \geq n$ komponenter, er de lineært uavhengige hvis, og bare hvis, vektorlikningen

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n = 0$$

bare har den trivielle løsningen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Setning 5.6

1. To vektorer med n komponenter er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke er parallelle.
2. Anta at $u_1, u_2, \ldots, u_n$ er n vektorer med n komponenter. Hvis A er den kvadratiske matrisen som har disse vektorene til søyler, er vektorene lineært uavhengige hvis og bare hvis $|A| \neq 0$.

La oss ta for oss noen eksempler der vi bruker denne setningen.

▼

Eksempel 5.8

Undersøk om de to vektorene $u = (1, 3, -1, 2)$ og $v = (2, -1, 1, 2)$ er lineært uavhengige.

Løsning

At disse to vektorene er lineært uavhengige kan vi se ved "inspeksjon". Vi ser at $v_1 = 2u_1$ og at $v_2 = -\frac{1}{3}u_2$. Da er ikke $v = k\, u$, og derfor er ikke u og v parallelle. To vektorer som ikke er parallelle, er lineært uavhengige.

Vi kan også gå fram på en annen måte for å avgjøre om de to vektorene er lineært uavhengige. Da undersøker vi om likningen $a\,u + b\,v = 0$ bare har den trivielle løsningen $a = b = 0$. Hvis det er tilfelle, er vektorene lineært uavhengige.

Siden vi her har 2 vektorer med 4 koordinater (komponenter), kan vi ikke bruke metoden med å regne ut verdien til en determinant. Grunnen er at determinanter bare er definert for kvadratiske matriser. Setter vi sammen de to vektorene vi har her til en matrise, blir størrelsen 4×2. Vi må derfor bruke *definisjonen* av lineær uavhengighet. Dette leder til denne likningen:

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette er et likningssystem med 4 likninger og 2 ukjente. Vi setter opp totalmatrisen og overfører denne til redusert trappeform ved hjelp av Gauss-Jordan-eliminasjon. Bruk gjerne "rref"-kommandoen i MATLAB. Dette gir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Radoperasjoner} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av den reduserte trappematrisen ser vi at $a = b = 0$. De to vektorene er altså lineært uavhengige.

■

▼

Eksempel 5.9

Vis at vektorene $u = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ og $v = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12)$ er lineært avhengige.

Løsning

Vi ser at alle komponentene i v er dobbelt så store som de tilsvarende komponentene i u. Derfor kan vi skrive $u = 2v$, og vektorene er parallelle. Derfor er de lineært avhengige.

Dersom vi skal bruke definisjonen av lineær uavhengighet, må vi vise at vektorlikningen $a\,u + b\,v = 0$ har andre løsninger enn $a = b = 0$. Ved å utføre lineære radoperasjoner, for eksempel ved å bruke "rref"-kommandoen i MATLAB, finner vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 6 & 11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Radoperasjoner} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den øverste raden i den rekke-reduserte matrisen viser at alle a'er og b'er som er slik at $a + 2b = 0$ oppfyller likningen. Vi kan velge a fritt, slik at vi får en ikke-triviell løsning. De to vektorene er altså lineært avhengige.

■

▼

Eksempel 5.10

Nedenfor har vi skrevet opp et likningssystem med 4 ukjente og 2 likninger:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0 \end{array}$$

Skriv løsningsvektoren $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon av to vektorer.

Løsning

At vi skal skrive løsningsvektoren som en lineær kombinasjon av to vektorer, betyr at vi skal skrive løsningsvektoren:

$$x = s\,u + t\,v$$

der s og t er konstanter, og u og v er vektorene vi skal bestemme.

Strategien for å løse dette problemet er å forsøke å løse likningssystemet og deretter skrive løsningen på vektorform. For å gjøre dette bruker vi Gauss-Jordan-eliminasjon på totalmatrisen.

Vi skriver opp totalmatrisen til likningssystemet.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Når vi bruker elementære radoperasjoner på denne matrisen og overfører den til redusert trappeform, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Her ser vi at x_3 og x_4 er fri variable, mens x_1 og x_2 er avhengig variable. Vi setter $x_3 = s$ og $x_4 = t$ inn i likningen som svarer til den nederste raden i den reduserte trappematrisen, får vi:

$$x_2 = \frac{1}{3}\,s - \frac{2}{3}\,t$$

Deretter setter vi inn i likningen som svarer til den øverste raden i den reduserte trappematrisen og får:

$$x_1 = -\frac{5}{3}\,s + \frac{1}{3}\,t$$

Løsningsmatrisen kan da skrives:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}\,s + \frac{1}{3}\,t \\ \frac{1}{3}\,s - \frac{2}{3}\,t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\,u + t\,v$$

Dermed har vi skrevet løsningsvektoren til likningssystemet som en lineær kombinasjon av to lineært uavhengige vektorer u og v.

■

5.3 Basis

Begrepet **basis** er sentralt i lineær algebra. Vi skal utdype dette begrepet.

5.3.1 Basisvektorer i planet $\mathbb{R}^2$ og i rommet $\mathbb{R}^3$

En basis kan vi oppfatte som de "grunnvektorene" vi kan bruke for å "bygge" alle de andre vektorer som er i rommet der basisen er. Ved å "sette sammen/kombinere" vektorene i basisen på en passende måte, kan vi altså få fram alle de vektorene vi måtte ønske. Kravene vi må stille til vektorer for at de skal danne en basis oppsummerer vi nedenfor.

I planet gjelder:

DEFINISJON 5.7

To vektorer $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ er en **basis** dersom

1. enhver vektor t i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineær kombinasjon av dem:

$$a\,u + b\,v = t$$

2. de to vektorene er lineært uavhengige.

I rommet gjelder:

DEFINISJON 5.8

Tre vektorer $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ og $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ er en **basis** dersom

1. enhver vektor t i $\mathbb{R}^3$ kan skrives som en lineær kombinasjon av dem:

$$a\,u + b\,v + c\,w = t$$

2. de tre vektorer er lineært uavhengige

Legg merke til at vi trenger 2 lineært uavhengige vektorer med 2 koordinater for å få en basis i $\mathbb{R}^2$, mens vi trenger 3 lineært uavhengige vektorer med 3 koordinater for å få en basis i $\mathbb{R}^3$.

Når den første av de to egenskapene ved en basis vi har skrevet i rammene over er oppfylt, sier vi at vektorene **utspenner** rommet de er i. (På engelsk sier vi *span*.) Denne egenskapen sikrer oss at vi kan komme til et hvert sted i planet og i rommet ved å "gå" i passende lengder i de retningene som vektorene i basisen peker.

Det er viktig å sjekke at *begge* betingelsene er oppfylt for at vi skal kunne konkludere med at vektorer danner en basis. De to vektorene $v_1 = (1, 1, 0)$ og $v_2 = (1, 0, 0)$ er lineært uavhengige, men de danner ikke en basis for $\mathbb{R}^3$. Vi kan for eksempel ikke lage en lineær kombinasjon av dem for å "lage" vektoren $v_3 = (0, 0, 1)$. Grunnen er at den tredje komponenten er lik null for begge vektorene, og da kan vi ikke legge dem sammen og få 1 til svar.

▼

Eksempel 5.11

Vi har tre vektorer:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} a-1 \\ a^2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a. For hvilke verdier av a danner de tre vektorene en basis for $\mathbb{R}^3$?

b. Sett $a = 0$ og skriv vektoren $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon av $v_1,\ v_2$ og v_3.

Løsning

a. Alle de tre vektorene har tre komponenter. De danner derfor en basis for $\mathbb{R}^3$ når de er lineært uavhengige. Dersom vi lager en matrise A der søylene er de tre vektorene, er vektorene lineært uavhengige når $|A| \neq 0$. Dette gir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ 2 & a & a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 \neq 0$$

Andregradslikningen $-a^2 + a + 2 = 0$ har løsning $a = -1$ og $a = 2$. Dette viser at de tre vektorene danner en basis når $a \neq -1$ og $a \neq 2$.

b. Vi skal bestemme $x_1,\ x_2$ og x_3 slik at $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u$ når $a = 0$. Da må vi løse dette likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Løsningen er:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2}$$

Det viser at

$$u = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{3}{2} v_2 - \frac{3}{2} v_3$$

■

5.3.2 Standardbasis for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

Den mest brukte basisen i planet er vektorene

$$e_1 = i = (1,\ 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad e_2 = j = (0,\ 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den mest brukte basisen i det tredimensjonale rommet er vektorene

$$e_1 = i = (1,\ 0,\ 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = j = (0,\ 1,\ 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_3 = k = (0,\ 0,\ 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kaller disse basisene **standardbasisen** for henholdsvis $\mathbb{R}^2$ og for $\mathbb{R}^3$. Dette er vektorer som ligger langs koordinataksene i xy- og xyz-koordinatsystemet, og som alle har lengde lik 1. Vi kaller vektorer som har lengde 1 for **enhetsvektorer**.

Det er svært enkelt å skrive en vilkårlig vektor som en lineær kombinasjon av vektorene som utgjør standardbasisen. Det ser vi av dette eksempelet:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3$$

Som vi ser er faktorene vi må multiplisere basisvektorene med tallene vi finner igjen i vektoren.

5.3.3 Dimensjonen til et vektorrom

Planet $\mathbb{R}^2$ og rommet $\mathbb{R}^3$ er eksempler på **vektorrom**, se avsnitt 5.4.

DEFINISJON 5.9

Dimensjonen til et vektorrom svarer til det største antall vektorer som kan danne en basis. Kaller vi vektorrommet for V, skriver vi dim$V$ for dimensjonen.

I planet $\mathbb{R}^2$ kan vi maksimalt finne 2 linært uavhengige vektorer som kan danne en basis, og i rommet $\mathbb{R}^3$ kan vi maksimalt finne 3. Da er dimensjonen til disse rommene 2 og 3. Det stemmer godt med det vi er vant med fra før.

Dersom vi plukker ut de to lineært uavhengige vektorene $u_1 = (1,\ 2)$ og $u_2 = (-1,\ -1)$ fra planet, ser vi at alle andre vektorer i planet kan skrives som en lineær kombinasjon av disse. Uansett hvilke to lineært uavhengige vektorer vi plukker fra planet, gjelder dette. Derfor er dimensjonen til planet 2.

Mengden av alle lineære kombinasjoner av vektorene $v_1,\ v_2, \cdots,\ v_n$ kaller vi **spennet** til vektorene. Vi skriver dette som span$\{v_1,\ v_2, \cdots,\ v_n\}$.

5.3.4 Hva skjer når vi forsøker å øke antall vektorer i en basis?

Vi har sett følgende:

1. I $\mathbb{R}^2$ danner to lineært uavhengige vektorer med to koordinater en basis.
2. I $\mathbb{R}^3$ danner tre lineært uavhengige vektorer med tre koordinater en basis.
3. Dimensjonen til et vektorrom er lik det største antall lineært uavhengige vektorer som kan danne basis for vektorrommet.

Hva skjer dersom vi prøver å "dytte" en ekstra vektor inn i en basis?

La oss gå ut fra at de to vektorene u og v danner en basis for $\mathbb{R}^2$. Kaller vi basisen $\mathfrak{B}$ kan vi skrive $\mathfrak{B} = \{u,\ v\}$. Basisen skriver vi altså som en mengde av de to vektorene. Hvis vi legger til en ny vektor w til basisen får vi en ny mengde $\mathfrak{C} = \{u,\ v,\ w\}$. Denne mengden er *ikke* en basis, fordi én av de tre vektorene kan skrives som en lineær kombinasjon av de to andre. Det følger av kravet vi stiller til en basis, nemlig at en hver vektor i rommet definert av basisen kan skrives som en lineær kombinasjon av basisvektorene.

Vi konkluderer:

Setning 5.7

Dersom en mengde vektorer $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$ inneholder flere vektorer enn dimensjonen til vektorrommet de er i, er vektorene i mengden lineært avhengige.
Mengden er *ikke* en basis for rommet.

5.3.5 To viktige setninger

Her skriver vi opp to setninger som kan være nyttige når vi arbeider med vektorer. Tenk gjennom dem, og prøv å få en geometrisk forståelse av hva de betyr.

Setning 5.8

p vektorer med n koordinater er alltid lineært avhengige dersom $p > n$.

Det betyr at 3 eller flere vektorer i $\mathbb{R}^2$ *alltid* er lineært avhengige, og at 4 eller flere vektorer i $\mathbb{R}^3$ *alltid* er lineært avhengige.

▼

Eksempel 5.12

Undersøk om vektorene $u = (1, 2)$, $v = (1, 1)$ og $w = (3, 5)$ er lineært uavhengige. Hvis de ikke er lineært uavhengige, skal du skrive w som en lineær kombinasjon av de to andre vektorene.

Løsning

Fra setning 5.8 over ser vi at siden vi har flere vektorer enn antall komponenter i vektorene, er vektorene lineært avhengige. Takket være teoremet, slipper vi å regne mer på dette.

Hvis vi skulle ha vist at vektorene er lineært avhengige ved regning, måtte vi ha vist at likningssystemet:

$$a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrcl} a & +b & +3c & = & 0\\ 2a & +b & +5c & = & 0 \end{array}$$

ikke *bare* har den trivielle løsningen $a = b = c = 0$. Det kunne vi for eksempel gjøre ved å overføre den utvidede koeffisientmatrisen til redusert trappeform. Da hadde vi fått:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Her blir c en fri variabel, slik at $a = -2c$ og $b = -c$. Når vi skal skrive w som en lineær kombinasjon av de to andre vektorene, kan vi *velge* en verdi for c, for eksempel $c = -1$. Da ser vi at vi kan skrive:

$$w = 2u + v$$

Det er ingen ting i veien for å velge andre verdier for c. Dersom vi velger $c = 2$ får vi $a = -4$ og $b = -2$. Da blir:

$$2w = 4u + 2v$$

Som vi ser er dette den samme lineærkombinasjonen.

■

Vi skal lære om vektorrom i avsnitt 5.4. Her skal vi bare skrive opp en setning som gjelder rommene $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Setning 5.9

Vektorrommet $\mathbb{R}^2$ består av alle vektorer som har 2 koordinater.

Vektorrommet $\mathbb{R}^3$ består av alle vektorer som har 3 koordinater.

5.3.6 Basis for løsningsrommet til et likningssystem

Det går an å vise at løsningene til et lineært likningssystem er et vektorrom. (Se avsnitt 5.4 om vektorrom.) Vi har tidligere sett at dersom vi har flere ukjente enn likninger, vil vi alltid finne ikke-trivielle løsninger til det homogene likningssystemet. Det betyr at ikke alle de ukjente er lik null. I dette tilfellet går det an å finne en basis til **løsningsrommet** til likningssystemet. Eksemplet nedenfor viser hvordan vi går fram.

▼

Eksempel 5.13

Bestem en basis for løsningsrommet til likningssystemet

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0 \end{array}$$

Løsning

Vi ser at dette er det samme likningssystemet vi løste i eksempel 5.10. Da fant vi denne løsningen:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at *alle* løsningene til likningssytemet kan skrives som en lineær kombinasjon av to vektorer. En basis for løsningsrommet er da:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

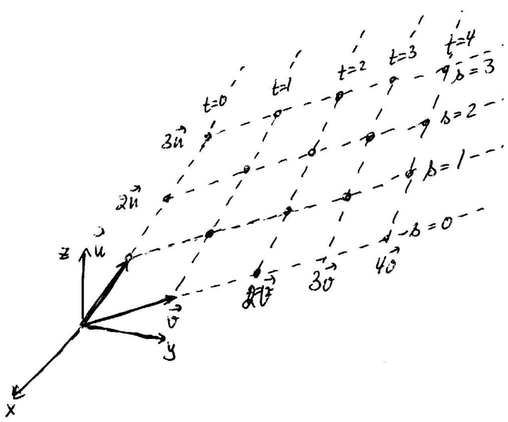
■

5.3.7 Basis for et plan i rommet

Noen ganger kan det være hensiktsmessig å kunne beskrive et plan i rommet. Det kan for eksempel være en lasterampe i en lagerhall, eller en vegg som er skrå for å oppnå visuelle, spennende effekter. Bygget til Den Norske Opera i Bjørvika i Oslo er et eksempel på det, se figur 5.7.

Et plan i rommet kan defineres ved hjelp av 2 vektorer som er lineært uavhengige. Disse vektorene må ha 3 komponenter. Vi sier at de to vektorene utspenner planet. Dersom du lar armene dine symbolisere vektorene, vil du kanskje "se" planet som armene dine utspenner foran deg når du strekker ut armene i forskjellige retninger.

Figur 5.7: Operaen i Bjørvika har flere plan som går på skrå nedover mot vannet.



Figur 5.8: Planet som er utspent av de to vektorene $u = (-1,\ 1,\ 1)$ og $v = (1,\ 2,\ 2)$

▼

Eksempel 5.14

Lag en parameterfranstilling for planet som blir utspent av vektorene $u = (-1, 1, 1)$ og $v = (1,\ 2,\ 2)$.

Løsning

Ved å betrakte figur 5.8 skjønner vi at en parameterframstilling for planet er:

$$w = su + tv = s(-1,\ 1,\ 1) + t(1,\ 2,\ 2)$$

der s og t er reelle tall. Ved å velge verdier for s og t kan vi komme til et hvilket som helst punkt i dette planet. På figuren har vi tegnet inn noen av disse punktene.

■

Eksempel 5.14 gir oss en ide om hvordan vi kan beskrive et plan i rommet på parameterform. Dersom planet er utspent av de to vektorene $u = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ og $v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, er likningen for planet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

De to vektorene u og v er basis for planet.

▼

Eksempel 5.15

Bestem en basis for planet $x - 3y + 2z = 0$.

Løsning

Vi har sett at et plan kan skrives som $x = su + tv$ der u og v er to lineært uavhengige vektorer som utspenner planet. Da er disse to vektorene basis for planet. I vårt tilfelle skal vi altså bestemme to lineært uavhengige vektorer som begge ligger i planet $x - 3y + 2z = 0$.

Vi ser at planet beskrives av én likning med 3 ukjente. Totalmatrisen er skrevet på redusert trappeform:

$$[1 \quad -3 \;\; 2 \;\; 0]$$

Da ser vi at y og z er fri parametre, så vi setter $y = s$ og $z = t$. Dette gir $x = 3y - 2z = 3s - 2t$. Dersom (x, y, z) er et punkt i planet, kan vi skrive:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette viser at søylevektorene (3, 1, 0) og (−2, 0, 1) er basis for planet.

■

5.3.8 Med en basis kan vi "komme dit vi vil"

En viktig grunn til at man innfører begrepet **basis** er at man ved hjelp av basisvektorene kan beskrive alle punkter i det rommet man arbeider. Dersom man skal beskrive et rammeverk, se figur 5.9, kan alle punktene beskrives ved hjelp av basisvektorene. Dette kan man nyttiggjøre seg av når man skal regne ut belastningene i konstruksjonen.

I CAD-programmer kan vi se illustrasjoner av konstruksjonen som en tredimensjonal figur. Skal man se konstruksjonen fra flere sider må man rotere den. Matematisk betyr det at vi endrer koordinatene til hvert punkt i forhold til det stedet vi betrakter konstruksjonen fra. For å regne ut de nye posisjonene kan man gjøre en rotasjon av basisvektorene. Kjenner man sammenhengen mellom punktene i én basis, er det enkelt å regne ut posisjonene i en ny basis.

Figur 5.9: Posisjonen til hver enkelt sammenføyning i dette rammeverket av stål kan beskrives som en lineær kombinasjon av 3 basisvektorer. Det bruker man blant annet i CAD-programmer. (Foto: Science Photo Library)

Når vi ser figur 5.9 skjønner vi også hvorfor det er 2 krav som må være oppfylt for at vi skal ha en basis. For å komme til et vilkårlig punkt i konstruksjonen, må vi kunne flytte oss i 3 retninger. Forenklet kan vi si at vi må kunne bevege oss fram, til siden og opp. Derfor trenger vi 3 vektorer for å kunne nå dit vi skal. Disse vektorene må også være lineært uavhengige. Er de ikke det, vil antall retninger vi kan flytte oss i avta.

5.4 Vektorrom og underrom

Orienteringsstoff ✓

I det forrige avsnittet har vi snakket om "planet" og "rommet". Når vi har sagt "rommet", har vi tenkt på et tredimensjonalt rom som det vi beveger oss i til daglig. I dette avsnittet skal vi diskutere nærmere hva som ligger i begrepet "rom" sett fra et matematisk ståsted.

5.4.1 n-dimensjonale vektorer

Vi har en medfødt oppfatning av det tredimensjonale rommet vi lever i. Når vi begynner å beskrive dette rommet matematisk, kan vi for eksempel tenke på dette rommet som mengden av alle punkter $(x,\ y,\ z)$. Vi kan tenke på en vektor v i rommet som et ordnet talltrippel $v = (x,\ y,\ z)$.

Det er ingen ting i veien for å generalisere dette videre til høyere dimensjoner, men da mister koordinatene sin "vanlige" betydning. Den enkleste utvidelsen vi kan tenke oss er kanskje den der vi lar tiden være "den fjerde dimensjonen". Vektoren $v = (x, y, z, t)$ svarer da til en posisjon i rommet ved et bestemt tidspunkt. Det kan for eksempel være et sted på veien kl 11.32 onsdag 8. november 2006.

Vi kan utvide disse vektorene til så mange dimensjoner vi vil. Vi må da passe på at vi vet hva hver enkelt av koordinatene betyr, eller vi kan la det være en abstrakt matematisk konstruksjon. Når antall komponenter i vektorene blir større enn 3, klarer vi ikke å tegne vektorene lenger.

Et n**-tuppel** er en ordnet liste av n tall: $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Det n**-dimensjonale rommet** $\mathbb{R}^n$ er mengden av alle n-tupler. Elementene i $\mathbb{R}^n$ blir kalt et **punkt** eller en **vektor**. Vi kan skrive et n-tuppel som en søylevektor:

$$\vec{x} = x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vi kaller hvert av tallene som inngår i et tuppel en **koordinat** eller en **komponent**. I 6-tuppelet $x = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11)$ er den tredje koordinaten (komponenten) lik $x_3 = 5$. Dimensjonen til rommet svarer altså til hvor mange koordinater (komponenter) det er i tuppelet (vektoren).

Vi bruker de samme regnereglene for n-dimensjonale vektorer som de vi kjenner for 2- og 3-dimensjonale vektorer. Det betyr at disse definisjonene gjelder:

DEFINISJON 5.10

Vi lar u og v være to vektorer med n komponenter. Da er addisjon/ subtraksjon og multiplikasjon med en skalar c definert ved uttrykkene:

$$u + v = (u_1, u_2, \cdots, u_n) + (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

$$c\,u = c \cdot (u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) = (cu_1,\ cu_2,\ \cdots,\ cu_n)$$

5.4.2 Definisjon av et vektorrom

Vi har nå definert vektoraddisjon og multiplikasjon av en vektor med en skalar. Disse reglene antar vi gjelder for det vi skriver nedenfor.

For at "noe" skal kunne kalles et **vektorrom**, må 8 krav være oppfylt:

DEFINISJON 5.11

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$
4. $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$
5. $r\,(u + v) = r\,u + r\,v$
6. $(r + s)\,u = r\,u + s\,u$
7. $r\,(su) = (rs)\,u$
8. $1(u) = u$

Vi kjenner igjen disse reglene med det vi er vant til fra regning med reelle tall. Mengden av alle reelle tall er derfor et vektorrom.

Det er ikke nødvendig at elementene i vektorrommet er n-tupler. De kan i prinsippet være hva som helst, bare de 8 kravene er oppfylt. For eksempel vil alle funksjoner som er definert på de reelle tallene danne et vektorrom. I denne boka skal vi ikke gå nærmere inn på dette.

5.4.3 Underrom

Et vektorrom kan ha **underrom**. Underrom må være lukket under addisjon, og være lukket ved multiplikasjon med en skalar. Dette uttrykker vi slik:

DEFINISJON 5.12

Et vektorrom V er et **underrom** hvis og bare hvis:

1. V er lukket under addisjon
2. V er lukket under multiplikasjon med en skalar

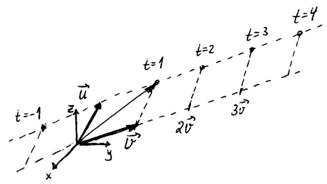
Det første punktet forteller at dersom vi legger sammen to vektorer som er i underrommet, vil summen bli en ny vektor som også er i det samme underrommet. Vi kommer ikke "ut av" underrommet ved å legge sammen vektorer.

Det andre punktet forteller at dersom vi multipliserer en vektor i underrommet med et tall, er den nye vektoren også i det samme underrommet.

Med denne definisjonen er et plan og en rett linje underrom til $\mathbb{R}^3$, og en linje er et underrom til $\mathbb{R}^2$. Dessuten er $\mathbb{R}^3$ et underrom til $\mathbb{R}^3$. Hvis vi for eksempel legger sammen to vektorer i xy-planet, er den nye vektoren også i xy-planet. Sagt litt upresist kan vi si at vi ikke kan komme opp fra gulvet ved å legge sammen vektorer som ligger *på* gulvet.

5.4.4 En linje som underrom av $\mathbb{R}^3$

Vi skal vise at en linje er et underrom av det "vanlige" rommet. Det er kanskje ikke så overraskende, men ved å se nærmere på dette oppnår vi to ting:



Figur 5.10: Linja som går gjennom punktet $(-1,\ 1,\ 1)$ i retningen parallell med vektoren $v = (1,\ 2,\ 2)$.

1. Vi lærer hvordan vi skal finne et uttrykk for ei linje i rommet.
2. Vi lærer hvordan vi skal gå fram for å vise at "noe" er et underrom.

▼

Eksempel 5.16

Lag en parameterfranstilling for ei linje som går gjennom punktet $(-1,\ 1,\ 1)$ i retningen parallell med vektoren $v = (1,\ 2,\ 2)$.

Løsning

Vi legger først merke til at de to vektorene $v = (1,\ 2,\ 2)$ og $u = (-1,\ 1,\ 1)$ er lineært uavhengige. Det betyr at de spenner ut et plan i rommet. Planet går gjennom de tre punktene (0, 0, 0), (−1, 1, 1) og (1, 2, 2).

Uttrykket for linja vi er ute etter må skrives på parameterform. Dersom w er en vektor som går fra origo til et punkt på linja, kan w uttrykkes ved de to vektorene u og v:

$$w = u + tv = (-1,\ 1, 1) + t(1,\ 2,\ 2)$$

der t er et reellt tall. At dette er riktig ser vi av figur 5.10. Der har vi vist hvordan vi legger sammen de to vektorene, og hvordan vi finner fram til punktene på linja der $t = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

■

▼

Eksempel 5.17

Vis at linja i rommet V som består av alle vektorer x som ligger på linja definert ved uttrykket

$$w = u + tv$$

der u og v er vektorer, er et underrom.

Løsning

Det er to krav som skal være oppfylt, nemlig at V skal være lukket under addisjon og lukket ved multiplikasjon med en skalar.
La $w_1 = u + t_1 v$ og $w_2 = u + t_2 v$ være to punkter på linja. Da er vektorene $x_1 = w_1 - u$ og $x_2 = w_2 - u$ to vektorer på linja. De er altså i vektorrommet V. Vi ser at:

$$x_1 + x_2 = (w_1 - u) + (w_2 - u) = t_1 v + t_2 v = tv$$

Summen er en vektor som er parallell med v. Siden vektorer kan tegnes der vi vil, kan vi for eksempel tegne den fra punktet der hvor spissen til u er. Da ser vi at den nye vektoren $x_1 + x_2$ ligger på linja. Rommet er altså lukket under addisjon.

For å se om rommet er lukket under multiplikasjon med en skalar, regner vi ut:

$$sx = s(w - u) = s(u + tv - u) = stv = kv$$

Ved det samme resonnementet som for summen av vektorene, ser vi at den nye vektoren også ligger på linja.

Dermed har vi vist at linja er et underrom.

■

5.4.5 Et plan som underrom av $\mathbb{R}^3$

Et plan er et underrom av det "vanlige" rommet. I avsnitt 5.3.7 så vi hvordan vi kunne beskrive et plan ved hjelp av en parameterframstilling:

$$x = s\,u + t\,v$$

Vi bruker denne skrivemåten her også.

▼

Eksempel 5.18

Vis at et plan V i det "vanlige" rommet er et underrom.

Løsning

Vi lar $x_1 = s_1 u + t_1 v$ og $x_2 = s_2 u + t_2 v$ være to vektorer i V. Da er:

$$x_1 + x_2 = (s_1 u + t_1 v) + (s_2 u + t_2 v) = (s_1 + s_2)u + (t_1 + t_2)v = su + tv$$

Rommet er altså lukket under addisjon. Videre er:

$$px = p(su + tv) = psu + ptv = as + bv$$

Rommet er lukket under multiplikasjon med en skalar.

Planet V er altså et underrom av $\mathbb{R}^3$ siden de to kravene til underrom er oppfylt.

■

5.5 Ortogonale vektorer

Fra tidligere kjenner vi til hvordan vi regner ut **skalarproduktet** (**prikkproduktet**) mellom to vektorer i planet og i rommet. Vi utvider denne definisjonen til å gjelde også for vektorer med n koordinater.

DEFINISJON 5.13

Skalarproduktet mellom vektorene $u = (u_1,\ u_2, \cdots,\ u_n)$ og $v = (v_1,\ v_2, \cdots,\ v_n)$ er definert ved uttrykket:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n$$

Vi innfører to nye begreper:

DEFINISJON 5.14

To vektorer er **ortogonale** dersom skalarproduktet mellom dem er null. Hvis i tillegg lengden til vektorene er lik 1, sier vi at vektorene er **ortonormale**.

Vi har også lært tidligere hvordan vi kan regne ut lengden av en vektor med to og med tre komponenter. Når vi utvider dette til å gjelde vektorer med n komponenter, får vi denne definisjonen:

DEFINISJON 5.15

Lengden (eller **normen**) til en vektor er definert ved uttrykket:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2}$$

Vi legger merke til at *standardbasisen* i et vektorrom er en **ortonormert basis**. Det betyr at alle basisvektorene har lengde 1, og at de står vinkelrett på hverandre.

Vi kan også utvide definisjonen av vinkelen mellom to vektorer til å gjelde vektorer med n komponenter:

DEFINISJON 5.16

Vinkelen θ mellom to vektorer er definert ved uttrykket:

$$u \cdot v = |u||v| \ \cos\theta$$

Vi ser at de definisjonene vi har skrevet opp her samsvarer godt med det vi er vant til fra arbeid med vektorer i planet og i rommet.

5.6 Linære kombinasjoner og lineær uavhengighet av vektorer i $\mathbb{R}^n$

Orienteringsstoff ✓

Det vi har sagt om vektorrommene $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ kan generaliseres til vektorrom med dimensjon n. Her skal vi nøye oss med å skrive opp noen av resultatene.

5.6.1 Lineær kombinasjon av vektorer

En vektor w er en **lineær kombinasjon** av vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dersom:

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

Hvis *alle* vektorer i et vektorrom V kan skrives på denne måten, sier vi at vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **utspenner** vektorrommet V.

5.6.2 Lineær uavhengighet

Vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er **lineært uavhengige** hvis likningen:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = \vec{0}$$

bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er lineært uavhenginge hvis og bare hvis $n \times n$-matrisen

$$A = [v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_n]$$

har en determinant som er forskjellig fra null.

5.6.3 Basis og dimensjonen til et vektorrom $\mathbb{R}^n$

Vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_n$ danner en **basis** for vektorrommet V dersom

1. vektorene er lineært uavhengige
2. vektorene spenner ut V

Alle vektorer i V kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene som danner basisen.

Standardbasisen til $\mathbb{R}^n$ består av enhetsvektorene

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \quad e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

Hvis n vektorer med n koordinater er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^n$, danner de en basis for $\mathbb{R}^n$. Det betyr at vi kan sjekke om n vektorer er en basis ved å undersøke determinanten til matrisen der vektorene er søyler. Er determinanten forskjellig fra null, er vektorene en basis.

En basis for et vektorrom inneholder det maksimale antallet lineært uavhengige vektorer i rommet. I $\mathbb{R}^2$ inneholder basisen 2 lineært uavhengige vektorer, i $\mathbb{R}^3$ er antallet 3, osv.

En konsekvens av dette er at dersom vi har $n + 1$ vektorer i et vektorrom med n vektorer i basisen, vil de $n + 1$ vektorene være lineært avhengige.

To forskjellige basiser for det samme vektorrommet inneholder like mange vektorer.

Antall vektorer n i basisen til et vektorrom V kaller vi **dimensjonen** til vektorrommet, og skriver $\dim V = n$.

5.6.4 Noen setninger om lineær (u)avhengighet

I dette avsnittet skriver vi opp tre setninger og en definisjon som kan være nyttige.

DEFINISJON 5.17

Rangen til en matrise er definert som det største antall lineært uavhengige søyler (rader) i matrisen.

Setning 5.10

Hvis p vektorer, hver med n koordinater (komponenter), danner søylene i en matrise, er vektorene lineært uavhengige hvis rangen til matrisen er p. Dersom rangen er mindre enn p, er vektorene lineært avhengige.

Setning 5.11

p vektorer med $n < p$ komponenter er alltid lineært avhengige.

Setning 5.12

Vektorrommet $\mathbb{R}^n$ består av alle vektorer som har dimensjon n.

Kapittel 6

Lineære systemer av differensiallikninger

Når vi skal lage matematiske modeller av verden omkring oss, er vi svært ofte opptatt av størrelser som endrer seg. Det hender at vi kan finne sammenhenger mellom en størrelse og hvordan den endrer seg, eller hvor mye "endringen endrer seg".

Fra tidligere vet vi at slike endringer blir godt beskrevet ved hjelp av **den deriverte**. Det betyr at vi ofte kan etablere sammenhenger mellom en størrelse og dens deriverte av første og høyere orden. Slike sammenhenger kaller vi en **differensiallikning**.

6.1 Systemer av differensiallikninger

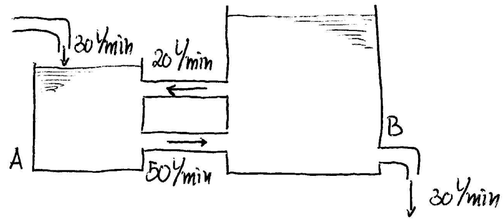
Differensiallikninger "oppstår" når vi lager en matematisk modell der størrelser endrer seg. Noen ganger vil en endring i én del av det systemet vi studerer føre til en endring i en annen del. Et eksempel kan være en flytende oljeplattform: Bølgebevegelser på havoverflata fører til bevegelser i hele konstruksjonen. De forskjellige delene av plattformen er "koblet" til hverandre. Hver endring modelleres ved hjelp av den deriverte av første og/eller høyere orden. Men de deriverte vil kunne være koblet til hverandre gjennom likninger. Da får vi et **system av differensiallikninger**.

Et klassisk eksempel på en situasjon der vi får et system av differensiallikninger, er to tanker som er koblet til hverandre, og der det strømmer væske mellom tankene. Dette kan for eksempel være en modell av en del av et lite renseanlegg.

I væskene er det oppløst salter. Vi ser på én type salt. La oss si at vi vet følgende:

Tank A: Volumet er 1000 l. Det renner 30 l rent vann inn i tank A per minutt. Det renner 50 l per minutt ut av tank A og inn i tank B. Fra tank B renner det 20 l per minutt inn i tank A.

Massen av av salt i tank A kaller vi x. Siden det strømmer væske ut og inn av tanken, vil verdien av x endre seg, slik at x er en funksjon av tida: $x = x(t)$.



Figur 6.1: To tanker forbundet med hverandre. Tankene inneholder salter oppløst i vann.

Konsentrasjonen av salt i tanken blir $\frac{x}{1000}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$.

Tank B: Volumet er 4000 l. Det renner 50 l per minutt inn fra tank A, og 20 liter per minutt ut av tanken og inn i tank A. Det renner 30 l væske ut av tank B per minutt.

Massen av salt i tank B er $y = y(t)$, og konsentrasjonen er $\frac{y}{4000}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$.

Det er lurt å tegne figur som viser hva som skjer. En skisse er vist i figur 6.1. Vi regner masseendring som negativ når det transporteres masse *ut* av en tank, og som positiv når det transporteres masse *inn* i tanken. Av figuren ser vi at antall liter væske i hver av tankene er konstant.

Vi minner om at *masse* = *konsentrasjon* × *volum*. Da kan vi sette opp disse differensiallikningene som gir oss mulighet til å bestemme massen av salt i hver tank:

$$endring\ av\ masse\ i\ tank\ A = -\ masse\ ut\ til\ B\ +\ masse\ inn\ fra\ B$$
$$x' = -50\frac{x}{1000} + 20\frac{y}{4000}$$

$$endring\ av\ masse\ i\ tank\ B =\ masse\ inn\ fra\ A\ -\ masse\ ut\ til\ A\ -\ masse\ ut\ av\ tank$$
$$y' = 50\frac{x}{1000} - 20\frac{y}{4000} - 30\frac{y}{4000}$$

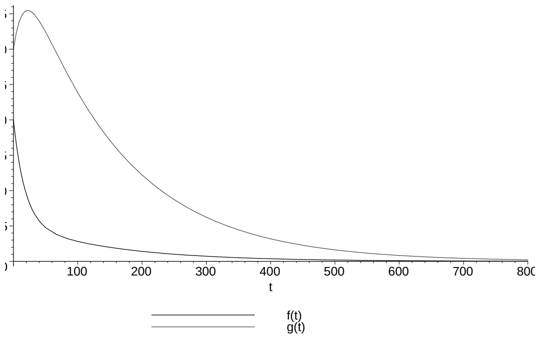
Vi trekker sammen, skriver brøker som desimaltall, og får:

$$\begin{aligned} x' &= -0,05\,x + 0,005\,y \\ y' &= 0,05\,x - 0,0125\,y \end{aligned} \tag{6.1}$$

I figur 6.2 har vi vist grafisk hvordan saltmengdene i de to tankene endrer seg med tida.

Dette er et eksempel på et **system av differensiallikninger** der vi har to ukjente funksjoner, x og y. Dersom vi skal studere hvordan en konstruksjon oppfører seg når den blir utsatt for varierende belastninger (bølger på en bro, vind på et høyhus), vil dette lede til systemer av differensiallikninger der det er mange ukjente. (Forhåpentligvis vil ikke endringene bli store siden vi jo som regel foretrekker at broer og hus ikke beveger seg for mye.)

I de neste avsnittene skal vi se hvordan vi skal gå fram for å løse slike systemer av differensiallikninger.



Figur 6.2: Grafene viser hvordan massen av salt vil endre seg i de to tankene dersom det er 20 kg salt i tank A og 30 kg salt i tank B ved tida $t = 0$.

6.2 Lineære systemer av differensiallikninger: Matriseform

I forrige avsnitt så vi et eksempel på at det kan være aktuelt å løse systemer av differensiallikninger. Vi ser av formen på systemet at "utseendet" har en del fellestrekk med vanlige lineære likningssystemer. I dette avsnittet skal vi se nærmere på dette.

6.2.1 Første ordens system av differensiallikninger

I avsnitt 6.1 lagde vi en modell av hvordan saltkonsentrasjonen i to tanker endrer seg. Det ga oss et system med to differensiallikninger og to ukjente funksjoner. I lineær algebra har vi lært hvordan et likningssystem kan skrives ved hjelp av vektorer og matriser. Et eksempel på dette er:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 4 \\ -3x & + & y & = & -2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi bruker den samme teknikken på likningssystemet 6.1, kan modellen som beskriver de to tankene skrives slik:

$$\begin{aligned} x' &= -0,05\,x + 0,005\,y \\ y' &= 0,05\,x - 0,0125\,y \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,005 \\ 0,05 & -0,0125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Vi ser at dette likningssystemet har formen

$$v'(t) = A\,v(t) \quad \Leftrightarrow \quad v'(t) - A\,v(t) = 0 \tag{6.4}$$

der $v(t)$ er en vektor og A er en matrise. I det tilfellet vi ser på her er

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad v' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,005 \\ 0,05 & -0,0125 \end{bmatrix}$$

Et likningssystem av denne formen er et **første ordens, homogent, lineært** system. Grunnen til at systemet er av **første orden**, er at den høyeste orden av den deriverte er 1. Systemet er **homogent** fordi det står 0 på høyre side i uttrykket $v'(t) - A\,v(t) = 0$. Systemet er **lineært** fordi den ukjente funksjonen bare forekommer i første potens, og heller ikke i uttrykk av typen $\sin x,\ e^x$ eller liknende.

Systemet av differensiallikninger i likning 6.2 skiller seg fra det vi har sett når vi har løst "vanlige" likningssystemer ved at vektorene v og v' er funksjoner av t. Det er imidlertid ingen ting i veien for at matriseelementer kan være funksjoner. Da kaller vi matrisen en **matrisefunksjon**, eller en **vektorfunksjon** dersom matrisen har én søyle eller én rad. To eksempler på vektor- og matrisefunksjoner er:

$$x(t) = \begin{bmatrix} t^2 + t + 1 \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t^3 & 4 + t \\ e^t & \cos t & \sqrt{t-3} \\ 2 & 0 & \frac{1}{t+1} \end{bmatrix}$$

En matrisefunksjon er *kontinuerlig* og *deriverbar* i et intervall dersom alle matriseelementene er kontinuerlige og deriverbare i intervallet. Når vi skal derivere en matrisefunksjon, deriverer vi alle elementene enkeltvis. Eksempelet nedenfor viser framgangsmåten.

▼

Eksempel 6.1

Deriver vektorfunksjonen

$$x(t) = \begin{bmatrix} t^2 + t \\ \sin(2t) \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

Løsning

Vi regner ut den deriverte til $x(t)$ ved å derivere hvert av elementene i vektoren:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} (t^2 + t)' \\ (\sin(2t))' \\ (e^{3t})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t + 1 \\ 2\cos(2t) \\ 3e^{3t} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

I likning 6.2 er koeffisientene i likningssystemet, det vil si matriseelementene i matrisen A, konstante. Det er ikke bestandig det er slik, men vi skal bare studere systemer av differensiallikninger der elementene i koeffisientmatrisen er konstante.

6.2.2 Hvordan viser vi at $x(t)$ er en løsning av et system av differensiallikninger?

Hvis matrisen A i likningssystemet $x' = Ax$ er en 2×2-matrise, er vi på jakt etter løsninger som kan skrives som en 2×1-søylevektor. Det betyr at løsningen skal skrives som

$$x(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

der $f(t)$ og $g(t)$ er funksjoner av t. Tilsvarende vil vi få en $n \times 1$-søylevektor som løsning dersom matrisen A har størrelse $n \times n$. Vi skal se hvordan vi går fram for å vise at en vektor er en løsning av et system av differensiallikninger.

▼

Eksempel 6.2

Et system av differensiallikninger skrevet på matriseform er gitt ved uttrykket:

$$v'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v(t)$$

Vis at vektorene

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_2(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$$

er løsninger til likningssystemet.

Løsning

Når vi skal vise at en vektor er en løsning til et system av differensiallikniner, bruker vi samme strategi som da vi unedrsøkte om en funksjon var en løsning av en differensiallikning:
Vi setter inn vektoren i venstre og i høyre side av likningssystemet hver for seg, og ser om de uttrykkene vi da får er like.
Vi ser først på vektoren $v_1(t)$:

Venstre side:

$$v_1'(t) = \begin{bmatrix} (2e^{7t})' \\ (e^{7t})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2e^{7t} \\ 7 \cdot e^{7t} \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = 7v_1(t)$$

Høyre side:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{7t} + 12e^{7t} \\ 3 \cdot 2e^{7t} + e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{7t} \\ 7e^{7t} \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = 7v_1(t)$$

Vi ser at venstre og høyre side er like. Derfor er $v_1(t)$ en løsning av likningssystemet. På tilsvarende måte kan vi vise at $v_2(t)$ også er en løsning.

■

6.2.3 Lineær kombinasjon av løsninger

I eksempel 6.2 viste vi at de to vektorene $v_1(t)$ og $v_2(t)$ var løsninger til likningssystemet $v' = A\,v$. Ved direkte innsetting går det an å vise at vektoren

$$v(t) = c_1\,v_1(t) + c_2\,v_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

der c_1 og c_2 er tall, også er en løsning av det samme likningssystemet. Dette er et eksempel på en generell setning som sier:

Setning 6.1

Hvis $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n$ er løsninger til likningssystemet $v' = Av$ der A er en $n \times n$-matrise, er også den **lineære kombinasjonen**

$$v = c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + \cdots + c_n\,v_n$$

en løsnig av det samme likningssystemet.

Spørsmålet blir: Hvordan skal vi bestemme løsningene v_1, v_2, … , v_n til likningssystemet $v' = A\,v$? Det skal vi ta opp i neste avsnitt.

6.2.4 Initialverdiproblemer

I avsnitt 6.2.3 så vi at en lineærkombinasjon av løsninger til et system av differensiallikninger også er en løsning. Den lineære kombinasjonen i likning 6.5 inneholder konstantene c_1 og c_2. Disse kan vi bare bestemme dersom vi har flere opplysninger. Slike opplysninger kaller vi **initialbetingelser**. Problemet vi skal løse, kalles da et **initialverdiproblem**.

Oppgaven i eksempel 6.2 kan omformuleres til et initialverdiproblem på denne måten:

Løs initialverdiproblemet

$$v'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v(t), \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setter vi inn initialbetingelsen i likning 6.5 får vi et likningssystem der c_1 og c_2 er de ukjente:

$$c_1 v_1(0) + c_2 v_2(0) = v(0)$$
$$c_1 \begin{bmatrix} 2e^{7\cdot 0} \\ e^{7\cdot 0} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2e^{-5\cdot 0} \\ e^{-5\cdot 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Når vi løser dette likningssystemet får vi $c_1 = \frac{3}{4}$ og $c_2 = \frac{1}{4}$. Da kan vi skrive løsningen av initialverdiproblemet som

$$v(t) = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$$

6.3 Egenverdimetoden for å løse likningssystemet $x'(t) = A\,x(t)$

Vi tar for oss systemet av differensiallikninger bestemt ved:

$$\begin{aligned} f' &= f + 12g \\ g' &= 3f + g \end{aligned} \tag{6.6}$$

der f og g er funksjoner av t. Hvis vi kaller den ukjente løsningsvektoren x, og setter søylevektoren $x = (f,\, g)$, kan dette likningssystemet skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad \Leftrightarrow \quad x'(t) = A\,x(t)$$

I avsnitt 6.2.2 viste vi at vektorene

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

er løsning av dette likningssystemet.

Vi skal nå se på en metode som noen ganger kan brukes til å *regne ut* løsningene til systemer av differensiallikninger som kan skrives på denne formen. Vi forutsetter at matrisen A har *konstante matriseelementer*.

6.3.1 "Formen" på løsningen av $x'(t) = Ax(t)$

Vi har sett at likningssystemet 6.6 har løsningene som er skrevet opp i likning 6.7. Vi kan skrive løsningene x_1 og x_2 på en litt annen form:

$$x_1(t) = e^{7t} \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad x_2(t) = e^{-5t} \begin{bmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Begge disse løsningene har formen $x = e^{\lambda\, t}\, v$, der λ er et tall og v er en vektor med *konstante* komponenter. Det kan derfor være en idé å undersøke om det *alltid* er slik at en løsning av likningssystemet $x'(t) = A\, x(t)$ kan skrives på formen $x(t) = e^{\lambda\, t}\ v$ (v konstant) når A er en matrise med konstante elementer.

For å undersøke dette, setter vi uttrykket for $x(t)$ inn på begge sider i likningen $x'(t) = A\, x(t)$. Da får vi:

Venstre side:

$$x'(t) = (e^{\lambda t}\, v)' = (e^{\lambda t})'\, v = \lambda e^{\lambda t}\, v$$

Høyre side:

$$Ax(t) = Ae^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$$

Når vi setter høyre side lik venstre side får vi:

$$\begin{aligned} Ax(t) &= x'(t) \\ e^{\lambda t} Av &= \lambda e^{\lambda t} v \\ Av &= \lambda v \end{aligned} \tag{6.9}$$

For at $x(t) = e^{\lambda t}\, v$ skal være en løsning av likningen $x'(t) = A\, x(t)$, må konstanten λ og vektoren v være slik at likning 6.9 er oppfylt. For å bestemme løsningen til systemet av differensiallikninger, må vi derfor regne ut λ'er og v'er som er løsninger av likningen $Av = \lambda v$.

Likning 6.9 har en spesiell form. Likningen forteller at hvis vi multipliserer en matrise A med en vektor v, skal resultatet bli at v blir multiplisert med et tall λ. Vi vet at vektorene v og $\lambda\, v$ er parallelle. Dette betyr at multiplikasjon av v med A, fører til at v strekkes eller "krympes" med en faktor λ.

Vektorer som har den egenskapen at de strekkes eller "krympes" når de multipliseres med en matrise, kaller vi **egenvektorer** til matrisen. Faktoren vektoren multipliseres med, kaller vi en **egenverdi**.

DEFINISJON 6.1

Et tall λ er en **egenverdi** til en $n \times n$-matrise A dersom

$$Av = \lambda v$$

der vektoren v *ikke* er nullvektoren.
Vektoren v kaller vi en **egenvektor** til matrisen A.

Vi legger merke til at egenverdier og egenvektorer bare er definert for *kvadratiske* matriser.

▼

Eksempel 6.3

Vi tar for oss matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ fra eksempel 6.2.

a. Vis at vektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til matrisen A.

b. Bestem egenverdien som hører til denne egenvektoren.

Løsning

a. For å vise at en vektor v_1 er en egenvektor til en matrise A, er det tilstrekkelig å regne ut produktet $A\,v_1$ og undersøke om resultatet kan skrives som et tall multiplisert med v_1. I dette tilfellet får vi:

$$A\,v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 12 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7\,v_1$$

Av dette ser vi at $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til matrisen A siden $A\,v_1 = 7 \cdot v$.

b. Siden vi kan skrive $A\,v_1 = 7 \cdot v_1$, ser vi at egenverdien til vektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er $\lambda_1 = 7$.

■

▼

Eksempel 6.4

Vi tar igjen for oss matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Den andre egenverdien til matrisen A er $\lambda_2 = -5$.

Bestem en egenvektor $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ som svarer til denne egenverdien.

Løsning

Siden $\lambda_2 = -5$ er en egenverdi til A, kan vi skrive

$$Av_2 = -5v_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 12y \\ 3x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x \\ -5y \end{bmatrix}$$

Når vi setter $x + 12y = -5x$ og $3x + y = -5y$, ser vi at vi får to like likninger: $x + 2y = 0$. Det betyr at vi kan *velge* en verdi av én av de to ukjente. Vi velger $y = 1$. Det gir oss $x = -2$. En egenvektor som svarer til egenverdien $\lambda = -5$ er altså $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

■

I eksempel 6.4 så vi at vi hadde mulighet til å *velge* en verdi for en av komponentene i egenvektoren. Da dette valget var gjort, var verdien av den andre komponenten bestemt. Dette viser at det er flere vektorer som hører sammen med en bestemt egenverdi.

Setning 6.2

Dersom v er en egenvektor til matrisen A med egenverdi λ, vil vektoren $u = kv$ (der $k \neq 0$ er et tall) også ha denne egenverdien.

Det er lett å vise at det er slik:

$$Au = A(kv) = k \cdot Av = k \cdot \lambda v = \lambda(kv) = \lambda u$$

Dette viser at *alle vektorer som er parallelle med en bestemt egenvektor har samme egenverdi*. I eksempel 6.4 kunne vi ha valgt $y = 2$ i stedet for $y = 1$. Vektoren $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ er også en egenvektor til matrisen A, med egenverdi -5.

Vi har nå sett hvordan vi kan vise at en vektor er en egenvektor til en matrise (eksempel 6.3). Vi har også sett hvordan vi kan bestemme en egenvektor når egenverdien er kjent (eksempel 6.4). Men hvordan skal vi bestemme egenverdier og egenvektorer når det bare er matrisen som er kjent? Det skal vi se på i avsnitt 6.3.3. Men la oss først oppsummere det vi har sett i dette avsnittet, se avsnitt 6.3.2.

6.3.2 Løsningen til $x' = A\,x$, egenverdier og egenvektorer

I avsnitt 6.3.1 viste vi at dersom λ_1 er en egenverdi til matrisen A og med tilhørende egenvektor v_1, er $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}\, v_1$ en løsning til systemet $x' = A\,x$ av differensiallikninger. Dette kan vi generalisere slik:

Setning 6.3

Dersom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er egenverdier til $n \times n$-matrisen A, og $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er tilhørende egenvektorer, er løsningen til systemet $x'(t) = A\,x(t)$ vektoren

$$x(t) = c_1\,e^{\lambda_1\,t}\,v_1 + c_2\,e^{\lambda_2\,t}\,v_2 + \ldots + c_n\,e^{\lambda_n\,t}\,v_n$$

der $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er konstanter.
Konstantene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kan bestemmes dersom vi kjenner initialbetingelser gitt ved $x(0) = x_0$.

Hvordan vi regner ut konstantene når vi kjenner en initialbetingelse, kan du se et eksempel på i avsnitt 6.2.4.

6.3.3 Den karakteristiske likningen

Vi har sett at vi må bestemme egenverdier og egenvektorer til koeffisientmatrisen til et system av differensiallikninger for å regne ut løsningene. For å finne en metode vi kan bruke når vi skal regne ut egenverdiene og egenvektorene til en matrise, tar vi utgangspunkt i definisjonen av egenverdi. Nedenfor viser vi hvordan vi går fram.

I venstre kolonne nedenfor har vi skrevet opp de generelle uttrykkene for hvordan vi regner. I høyre kolonne har vi skrevet opp det samme, men vist utregningene for matrisen A fra eksempel 6.3. Vi har kalt identitetsmatrisen I.

$$Av = \lambda v = \lambda I v \qquad \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Av - \lambda I v = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \qquad \left(\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dette er et homogent likningssystem. Fra definisjon av egenvektorer, vet vi at vektoren v ikke kan være null-vektoren. Derfor må vi kreve at likningssystemet

$$(A - \lambda I)v = 0$$

skal ha en *ikke-triviell løsning*, det vil si at ikke alle komponentene i v kan være lik null. Men det betyr at determinanten til matrisen $A - \lambda I$ må være lik null, se avsnitt 3.5.6. Det er altså bare de verdiene av λ som gjør denne determinanten lik null som kan være egenverdier til matrisen A. Vi konkluderer derfor:

Setning 6.4

Vi regner ut egenverdiene λ til matrisen A ved å bestemme de verdiene av λ som er slik at

$$\det(A-\lambda I) = |A-\lambda I| = 0$$

Likningen $|A-\lambda I| = 0$ kaller vi **den karakteristiske likningen** til den kvadratiske matrisen A.

Det er *bare* de verdiene av λ som oppfyller den karakteristiske likningen som kan være egenverdier for matrisen. Polynomet vi får når vi regner ut determinanten $|A-\lambda I|$, kaller vi **det karakteristiske polynomet**.

For å regne ut egenverdier og egenvektorer til en matrise går vi fram slik:

1. Løs den karakteristiske likningen

$$|A-\lambda I| = 0$$

   der λ er den ukjente.

2. For hver verdi av λ som tilfredsstiller den karakteristiske likningen, løs likningssystemet

$$(A-\lambda I)v = 0$$

   der vektoren v er den ukjente.

La oss se på noen eksempler.

▼

Eksempel 6.5

I eksempel 6.2 så vi at vektorene

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{-5t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = e^{7t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

var løsninger til likningssystemet $x' = Ax$ der $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Regn ut egenverdiene og tilhørende egenvektorer til A. Kommenter svaret.

Løsning

Vi regner ut egenverdiene til A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$$

som gir egenverdiene

$$\lambda_1 = -5 \qquad \lambda_2 = 7$$

De tilhørende egenvektorene finner vi ved å løse likningen $(A - \lambda I)v = 0$ for hver av de to egenverdiene, se metoden vi brukte i eksempel 6.4. Vi finner:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har sett at løsningene til likningssystemet kan skrives:

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{-5t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} v_1$$

og

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} = e^{7t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda_2 t} v_2$$

Vi ser at konstanten i eksponentialfunksjonene er egenverdiene til matrisen A, og at de to vektorene vi multipliserere eksponentialfunksjonene med, er egenvektorer til A.

■

▼

Eksempel 6.6

Regn ut egenverdiene og egenvektorer til matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Løsning

Vi bestemmer først egenverdiene, og deretter tilhørende egenvektorer.

Egenverdier
For å bestemme egenverdiene løser vi den karakteristiske likningen:

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(2-\lambda)(-1-\lambda) &= 0
\end{aligned}
$$

Vi ser at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer
Vi starter med å bestemme egenvektorer til egenverdien $\lambda_1 = 2$. Vi skal da bestemme en vektor som er slik at $(A-2I)v = 0$. Vi kaller vektoren $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Da får vi:

$$
\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Når vi multipliserer ut på venstre side, får vi:

$$
\begin{aligned}
0x + 0y &= 0 \\
3x - 3y &= 0
\end{aligned}
$$

Vi ser av den siste likningen at $x = y$. Siden vi bare har én likning, kan vi velge en verdi (bortsett fra 0) for én av de ukjente. Vi setter $y = 1$ (fordi det er et greit tall). Da blir $x = y = 1$. En egennvektor som svarer til egenverdien 2 er derfor

$$
v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Vis på tilsvarende måte at $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor som svarer til egenverdien -1.

Legg merke til at vi hele tiden har sagt *egenvektor*, og ikke *egenvektor**en***. Det kommer av at vi for hver egenverdi har mange egenvektorer. Grunnen er at alle vektorer som er parallelle med en egenvektor, også er en egenvektor.

■

6.3.4 Bruk av MATLAB for å bestemme egenverdier og egenvektorer

MATLAB-tips 6.1

De fleste matematikkprogrammer har ferdige rutiner som brukes for å regne ut egenverdiene til en matrise. I MATLAB bruker vi kommandoen **eig(A)** for å regne ut egenverdien til matrisen A. Hvis vi skal regne ut egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, taster vi inn denne sekvensen i MATLABs *Command Window*:

```
>> clear all
>> A=[ 1 12 ; 3 1 ]

A =

     1    12
     3     1

>> eig(A)

ans =

    7.0000
   -5.0000
```

Svaret (ans=) er 7.0000 og -5.0000, som er egenverdiene til A.

For å regne ut *både* egenverdier og egenvektorer på en gang, bruker vi kommandoen **[V, D]=eig(A)**. MATLAB-sekvensen nedenfor viser hvordan denne kommandoen blir brukt. (Sekvensen utføres i *Command Window*.)

```
>> clear all
>> A=[ 1 12 ; 3 1 ]

A =

     1    12
```

```
     3     1

>> [ V , D ] = eig(A)

V =

    0.8944   -0.8944
    0.4472    0.4472


D =

    7.0000         0
         0   -5.0000
```

I matrisen V er første søyle egenvektoren som svarer til egenverdien $\lambda = 7$, se matriseelementet $D_{1\,1}$ i matrisen D. Andre søyle i V er egenvektoren som svarer til egenverdien $\lambda = -5$ Denne egenverdien finner vi som matriseelementet $D_{2\,2}$ i matrisen D. MATLAB organsierer altså egenverdiene i en diagonalmatrise der egenverdiene står langs diagonalen, se avsnitt 7.5.5.

I avsnitt 6.3.1 regnet vi ut at egenverdiene og egenvektorene til matrisen A var

$$\lambda_1 = 7: \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = -5: \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at MATLAB har funnet de samme egenverdiene, men tilsynelatende andre egenvektorer. Da må vi huske at dersom v er en egenvektor, så er $k \cdot v$ der k er en konstant det også. Hvis vi divierer begge "MATLAB-egenvektorene" med 0.4472, ser vi at vi får de samme egenvektorene som vi har beregnet tidligere.

Det litt rare svaret MATLAB gir oss når vi regner ut egenvektorene, skyldes at MATLAB **normerer** svaret. Det betyr at egenvektorene som blir oppgitt har lengde 1. Det ser vi slik:

$$|\, v_1 \,| = \left| \begin{bmatrix} 0.8944 \\ \\ 0.4472 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{0.8944^2 + 0.4472^2} = \sqrt{0.8000 + 0.2000} = \sqrt{1} = 1$$

Hvis vi skal normere egenvektorene v_1 og v_2 ovenfor, må vi dividere med lengden av de egenvektorene vi har regnet ut:

$$u_1 = \frac{v_1}{|\, v_1 \,|} = \frac{(\,2,\, 1\,)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = (\,0.8944,\, 0.4472\,)$$

Tilsvarende regning gir $u_2 = (\,-0.8944,\, 0.4472\,)$.

6.3.5 Metode for å løse likningssystemet $x'(t) = Ax(t)$

Vi har sett at $e^{\lambda t} v$ er en løsning av likningssystemet $x' = Ax$ dersom λ er en egenverdi til A og v er en tilhørende egenvektor.

Dersom A er en 2×2-matrise, blir den karakteristiske likningen en andregradslikning. Den har inntil 2 reelle røtter. Er det 2 forskjellige egenverdier, kan vi regne ut 2 lineært uavhengige vektorfunksjoner som tilfredsstiller likningen $x'(t) = A\,x(t)$.

Hvis A er en $n \times n$-matrise, blir det karakteristiske polynomet et n'tegradspolynom. Den karakteristiske likningen kan da ha inntil n forskjellige røtter. Da vil vi kunne regne ut inntil n lineært uavhengige vektorer som er løsning til likningsssystemet.

I kapittel 7 skal vi se at det ikke er sikkert at vi klarer å finne like mange lineært uavhengige egenvektorer som det er søyler (rader) i matrisen A. *I denne boka skal vi bare se på tilfeller der vi kan bestemme n lineært uavhengige egenvetorer.*

For å løse likningssystemet $x'(t) = A\,x(t)$ bruker vi denne framgangsmåten:

1. Regn ut egenverdiene til A ved å løse likningen

$$|A - \lambda I| = 0$$

   Vi kaller egenverdiene $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, der ikke alle egenverdiene trenger å være forskjellige.

2. For hver egenverdi regner vi ut en egenvektor. Vi forsøker å bestemme n lineært uavhengige egenvektorer (noe som ikke alltid er mulig). Vi kaller disse $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n$.

3. Når vi har bestemt egenverdiene og de tilhørende *n lineært uavhengige egenvektorene* skriver vi **den generelle løsningen** som

$$x(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n\, e^{\lambda_n t} v_n$$

   der $c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n$ er konstanter.

4. Hvis det *ikke* er mulig å bestemme n lineært uavhengige egenvektorer til A, må vi bruke metoder vi ikke tar opp i denne boka for å bestemme alle løsningene til $x' = Ax$.

▼

Eksempel 6.7

a. Skriv systemet av differensiallikninger på formen $x' = A\,x$:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

b. Bestem den generelle løsningen til likningssytemet $x' = A\,x$.

Løsning

a. Vi bruker vanlig framgangsmåte for å skrive et likningssystem på vektor-matriseform og får:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b. Framgangsmåten videre blir:

1) Vi regner ut egenverdiene til A
2) Vi regner ut tilhørende egenvektorer, og håper å finne 2 som er lineært uavhengige.
3) Vi skriver den generelle løsningen $x(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, v_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, v_2$ der c_1 og c_2 er konstanter.

Egenverdiene bestemmer vi ved å løse likningen $|A - \lambda I| = 0$ Det gir $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$.

Vi bestemmer tilhørende egenvektorer ved å løse likningen $(A - \lambda I)v = 0$. Da finner vi:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse egenvektorene er opplagt lineært uavhengige. Derfor er løsningen til likningssystemet:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan også skrive ut uttrykkene for x_1 og x_2 hver for seg, dersom vi ønsker det. Vi bestemmer x_1 ved å "plukke ut" førstekomponentene i vektorene, og x_2 ved å plukke ut andrekomponentene i vektorene. Da får vi:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} \\ x_2 &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

Det er en smaksak om man vil skrive svarene som vektorer eller som eksplisitte uttrykk for hver ukjent.

■

Som vi har nevnt, er det ikke alltid vi finner n egenverdier og n lineært uavhengige egenvektorer når vi arbeider med likningssystemet $x' = A\,x$ der A er en $n \times n$-matrise. Vi kan oppsummere de forskjellige situasjonene vi kan komme borti slik:

n forskjellige, reelle egenverdier	Vi finner n lineært uavhengige egenvektorer. Den generelle løsningen er $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$
$k < n$ forskjellige, reelle egenverdier. De øvrige $n-k$ egenverdiene er like noen av de k vi har funnet	Hvis vi klarer å finne n lineært uavhengige egenvektorer, er den generelle løsningen $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$ Noen av disse egenverdiene er like.
$k < n$ forskjellige, reelle egenverdier. De øvrige $n-k$ egenverdiene er like noen av de k vi har funnet	Dersom vi *ikke* finner n lineært uavhengige egenvektorer, må vi bruke teknikker som ligger utenfor denne bokas rammer
Kompleske egenverdier	Dette dekkes ikke av denne boka

▼

Eksempel 6.8

Vi skal løse likningssystemet $x' = A\,x$ der A er en 3×3-matrise. Den karakteristiske likningen er

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Vi finner 3 lineært uavhengige egenvektorer v_1, v_2 og v_3.
Bruk disse opplysningene til å skrive opp et uttrykk for den generelle løsningen til likningssystemet uttrykt ved v_1, v_2 og v_3.

Løsning

Egenverdiene er løsningene til den karakteristiske likningen. Vi får:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

Siden vi har 3 forskjellige egenverdier vil vi kunne bestemme 3 lineært uavhengige egenvektorer, se avsnitt 7.5.2. Den generelle løsningen blir:

$$x(t) = c_1 e^{t}\, v_1 + c_2 e^{2t}\, v_2 + c_3 e^{3t}\, v_3$$

■

▼

Eksempel 6.9

Vi skal løse likningssystemet $x' = A\,x$ der A er en 3×3-matrise. Den karakteristiske likningen er

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Vi finner 3 lineært uavhengige egenvektorer $v_1,\ v_2$ og v_3.
Bruk disse opplysningene til å skrive opp et uttrykk for den generelle løsningen til likningssystemet $x' = A\,x$.

Løsning

Når vi løser den karakteristiske likningen får vi:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

Her er 2 av egenverdiene like, men vi har allikevel funnet 3 lineært uavhengige egenvektorer. Da får vi denne løsningen:

$$x(t) = c_1 e^{2t}\, v_1 + c_2 e^{2t}\, v_2 + c_3 e^{3t}\, v_3$$

Vi ser at to av leddene inneholder den samme eksponentialfunksjonen. Men siden det er 3 lineært uavhengige egenvektorer, får vi allikevel 3 lineært uavhengige vektorer som er løsning til likningen, og dermed 3 ledd i den generelle løsningen.

■

6.3.6 Å løse initialverdiproblemer

Når vi har løst likningssystemet $x' = Ax$ har vi kommet fram til en generell løsning på formen

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\, v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\, v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\, v_n$$

Den generelle løsningen skrives som en lineær kombinasjon av vektorfunksjoner som hver og en er løsning til likningen.

I avsnitt 6.2.4 så vi et eksempel på at vi trengte tilleggsopplysninger for å bestemme konstantene c_i. Slike tilleggsbetingelser kaller vi **initialbetingelser** eller **startbetingelser**. Disse formulerer vi slik at vi kjenner vektoren x ved en bestemt verdi at t. Initialbetingelsen kan for eksempel skrives:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{eller slik:} \;\; x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = 0$$

Problemet med å bestemme en løsning $x = x(t)$ som er slik at initialverdien er riktig, kaller vi et **initialverdiproblem**.

Framgangsmåten vi bruker når vi skal løse et initialverdiproblem som er formulert som

$$x'(t) = A\,x, \quad x(0) = x_0$$

der x_0 er en konstant vektor, er:

1. Bestem den generelle løsningen $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\, v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\, v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\, v_n$ ved å bruke egenverdimetoden.
2. Bestem koeffisientene $c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n$ ved å sette $x(0) = x_0$, og deretter løse de n likningene vi da får med hensyn på c'ene.

▼ ---

Eksempel 6.10

Løs initialverdiproblemet

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsning

I eksempel 6.7 regnet vi ut den generelle løsningen til dette likningssystemet. Vi fant da:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden vi nå arbeider med et initialverdiproblem, må vi også regne ut verdier av koeffisientene c_1 og c_2. For å klare det setter vi inn initialbetingelsen i den generelle løsningen. Det betyr at vi setter:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 e^{-0} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{0} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For å regne ut c_1 og c_2 må vi løse likningssystemet:

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive dette ut, og får da:

$$\begin{array}{rrcl} -2c_1 & +\,2c_2 & = & 1 \\ c_1 & +\,c_2 & = & 1 \end{array}$$

For å løse dette likningssystemet kan vi bruke den metoden vi syns er enklest. Vi får $c_1 = \frac{1}{4}$ og $c_2 = \frac{3}{4}$. Løsningen til initialverdiproblemet er da:

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{4}e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Som en kontroll på at vi har regnet riktig, kan vi sette inn $t = 0$ i uttrykket for $x(t)$. Da ser vi at vi får $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som er den korrekte initialverdien.

■

Kapittel 7

Mer om egenverdier og egenvektorer

I kapittel 4 lærte vi at en vektor v kunne *transformeres* til en annen vektor u ved å multiplisere v med en matrise A: $u = A\,v$. Geometrisk kunne vi utnytte dette til å forflytte punkter i planet og i rommet. Vi har blant annet sett hvordan vi kunne speile, skalere og rotere.

I dette kapitlet skal vi se på en bestemt type transformasjoner. Vi skal ta for oss de transfomasjonene som *strekker* eller *krymper* en vektor. Den nye vektoren beholder altså retningen til den opprinnelige, men kan endre lengde. Det betyr at vektorene er parallelle, og at transformasjonen kan skrives som $Av = \lambda v$, der A er en matrise og λ er et tall. Dette kjenner vi nå igjen som et egenverdiproblem.

Merkelig nok dukker slike problemer opp i en lang rekke sammenhenger. Løsning av et system av differensiallikniner er ett eksempel. Dersom vi skal beregne hvor mye vi kan belaste en vertikal bjelke før den knekker, kan problemet formuleres ved en likning av formen $Av = \lambda v$. Det kan også beregninger som skal beskrive hvordan et system som blir utsatt for variable belastninger oppfører seg. Et eksempel på dette er en oljeplattform som blir påvirket av krefter fra bølgene.

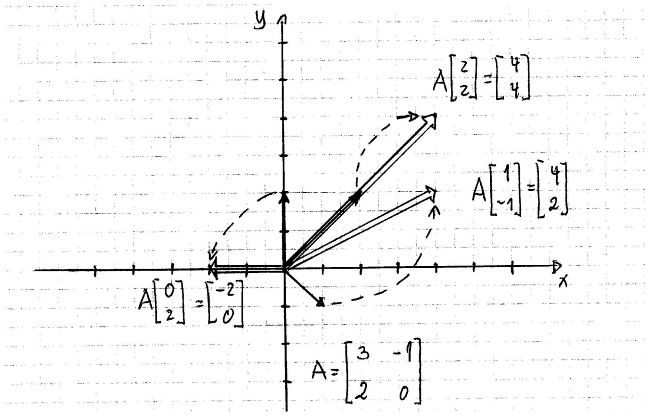
7.1 Geometrisk introduksjon til egenverdier og egenvektorer

Vi innleder dette avsnittet med å studere en transformasjon beskrevet ved en 2×2-matrise.

▼

Eksempel 7.1

Undersøk hvordan transformasjonen T representert ved matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$



Figur 7.1: Transformasjonen Av_i av tre søylevektorer, $v_1 = (2, 2)$, $v_2 = (1, -1)$ og $v_3 = (0, 2)$. (Vi har skrevet vektorene som tallpar for å spare plass. Vektoren $v_1 = (2, 2)$ er altså en søylevektor med 2 rader.)

transformerer vektorene $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Løsning

Vi regner ut matriseproduktene og får:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Av_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har vist hvordan disse vektorene blir transformert i figur 7.1. Vi ser at vektoren v_1 blir forlenget uten å forandre retning, mens de to andre vektorene forandrer retning. Vektoren Av_1 kan vi skrive som $2v_1$: $Av_1 = 2v_1$.

■

I eksempel 7.1 så vi at multiplikasjonen $Av_i,\ i = 1 \ldots 3$, ledet fram til en rotasjon i to av de tre tilfellene. I det siste tilfellet ble vektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ strukket til vektoren $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vi kan skrive dette som $Av_1 = 2v_1$. Vi ser at vektoren v_1 er en egenvektor til matrisen A med egenverdi $\lambda_1 = 2$.

▼

Eksempel 7.2

Vi tar for oss matrisen A fra eksempel 7.1.

a. Vis at vektoren $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til matrisen A.

b. Bestem egenverdien som hører til denne egenvektoren.

c. Undersøk om vektorene $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer til matrisen A.

Løsning

a. For å vise at en vektor v er en egenvektor til en matrise A, er det tilstrekkelig å regne ut produktet Av og undersøke om resultatet kan skrives som et tall multiplisert med v. I dette tilfellet får vi:

$$A\,v = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Av dette ser vi at $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til matrisen A siden $A\,v = v = 1 \cdot v$.

b. Siden vi kan skrive $A\,v = v = 1 \cdot v$ ser vi at egenverdien til vektoren v er $\lambda = 1$.

c. I eksempel 7.1 så vi at $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vektoren u er derfor *ikke* en egenvektor til matrisen A.

Når vi regner ut Aw får vi $Aw = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at vektoren $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor til A med egenverdi lik 2.

■

▼

Eksempel 7.3

En av egenverdiene til matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ er $\lambda = 3$.

Bestem en egenvektor som svarer til denne egenverdien.

Løsning

Siden $\lambda = 3$ er en egenverdi til B, kan vi skrive

$$Bv = 3v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

Dette gir:

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 0y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3x \\ 3x + 0y & = & 3y \end{array} \tag{7.1}$$

Av likning 7.1 ser vi at vi får to like likninger: $x - y = 0$. Det betyr at vi kan *velge* en av de to ukjente. Vi setter $y = 1$ som gir $x = 1$. En egenvektor som svarer til egenverdien $\lambda = 3$ er altså $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

■

7.2 Antall egenverdier til en matrise

Hvis vi skal regne ut egenverdiene til en generell 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ må vi løse den karakteristiske likningen $|A - \lambda I| = 0$. Dette gir andregradslikningen

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Vi vet at denne likningen kan ha to, én eller ingen reelle løsninger. Hvilket tilfelle som inntreffer avhenger av verdiene til a, b, c og d. Dersom vi regner med **komplekse tall** har alle andregradslikninger løsning. Vi skal ikke ta for oss tilfeller der egenverdiene blir komplekse i denne boka.

Vi kan få tre tilfeller:

1. To reelle egenverdier som hver gir én egenvektor.
2. Én reell egenverdi som gir én egenvektor.
3. Én reell egenverdi som gir to lineært uavhengige egenvektorer.

   I tillegg kommer det tilfellet vi ikke skal arbeide med:

4. To komplekskonjugerte egenverdier som gir to komplekskonjungerte egenvektorer.

Vi ser at en 2×2-matrise kan ha inntil 2 forskjellige egenverdier. Dersom matrisen A er en 3×3-matrise, vil den karakteristiske likningen gi oss en likning av formen:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dette er en tredjegradslikning, som alltid gir oss minst én reell egenverdi, men aldri mer enn 3.

Setning 7.1

> En $n \times n$-matrise gir en karakteristisk likning som er en n-tegradslikning. Denne kan aldri ha mer enn n løsninger, så det største antall egenverdier en $n \times n$-matrise kan ha, er n.

Det kan være vanskelig å løse høyere ordens karakteristiske likninger. Det kan hende at vi ikke klarer å regne ut en eksakt verdi for egenverdien, men blir nødt til å bruke numeriske metoder.

Dataprogram som for eksempel MATLAB løser slike problemer nokså lett. Men: Vi må huske på at numeriske metoder bare gir tilnærmede svar, og at i noen tilfeller er ikke disse svarene nøyaktige nok.

▼

Eksempel 7.4

Bestem egenverdiene og egenvektorer til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning

For å regne ut egenverdiene løser vi den karakteristiske likningen $|A - \lambda I| = 0$. Dette gir:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6 = 0$$

Vi har ingen generell formel for å løse en tredjegradslikning. Hvis vi derimot kan tippe på en løsning, kan vi bruke **polynomdivisjon** for å faktorisere venstre side i likningen. Det kan være lurt å prøve med en heltallig løsning som er slik at konstantleddet er delelig med verdien vi tipper på.

Prøver vi oss litt fram, ser at $\lambda = 1$ oppfyller likningen. Det betyr at divisjonen:

$$(\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6) : (\lambda - 1)$$

går opp. Utfører vi divisjonen får vi:

$$(\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Da kan vi skrive den karakteristiske likningen slik:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

Denne løser vi lett ved å løse likningene $\lambda - 1 = 0$ og $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Vi finner egenverdiene:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

I dette tilfellet kunne vi ha funnet egenverdiene med en gang fordi determinanten er nedre triangulær. Da vet vi at determinanten er lik produktet av diagonalelementene, slik at den karakteristiske likningen blir:

$$|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Metoden vi brukte over vil imidlertid alltid fungere.

Vi skal så regne ut egenvektorene til hver av disse egenverdiene.

Egenverdien $\lambda = 1$
Vi skal bestemme vektoren v som oppfyller likningen $(A - 1 \cdot I)\, v = 0$. Skriver vi ut dette får vi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, x, y og z. Bruker vi en av metodene vi har lært for å løse homogene likningssystemer, får vi:

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = 1$$

En egenvektor til egenverdien 1 er altså $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenverdien $\lambda = 2$

Vi bruker samme framgangsmåte og finner egenvektoren $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenverdien $\lambda = 3$

Vi bruker samme framgangsmåte igjen, og finner $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ■

▼

Eksempel 7.5

Regn ut egenvektorer til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Løsning

Når vi løser den karakteristiske likningen $|A - \lambda I| = 0$, finner vi at egenverdiene er $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. For å bestemme egenvektorer, skal vi finne de vektorene v som tilfredsstiller likningen $(A - 3I)\,v = 0$. Dette gir:

$$(A - 3I)\,v = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den første av radene i denne matriselikningen viser at $x_2 = 0$. Da blir x_1 fri variabel, og vi kan for eksempel velge $x_1 = 1$. Vektoren $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er derfor en egenvektor til matrisen. Alle egenvektorene til matrisen har formen $v = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi ser at alle egenvektorene er parallelle med vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, siden de kan skrives på formen $v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dette er et eksempel på et en 2×2-matrise bare har én egenvektor. (Men det er selvsagt sånn at vektorene $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ også er egenvektorer. Dette teller imidlertid som én egenvektor!)

■

7.3 Egenverdier til triangulære matriser

I eksempel 7.4 regnet vi ut egenverdiene til en matrise som er nedre triangulær, det vil si en matrise der det bare står 0'er over diagonalen.

For *alle* triangulære matriser (både nedre og øvre triangulære) gjelder:

Setning 7.2

Egenverdiene til en triangulær matrise er lik diagonalelementene i matrisen.

▼

Eksempel 7.6

Regn ut egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

Løsning

Matrisen er øvre triangulær, så egenverdiene er lik diagonalelementene. Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 1.25$$

■

7.4 Å løse den karakteristiske likningen med MATLAB

MATLAB-tips 7.1

Vi har sett at dersom vi skal regne ut egenverdiene til en $n \times n$-matrise, må vi løse en n'te-gradslikning. Det klarer vi vanligvis ikke å gjøre uten å bruke en numerisk metode.

Hvis vi tar for oss den karakteristiske likningen i eksempel 7.4:

$$\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6 = 0$$

kan vi bruke MATLAB-kommandoen **roots** til å regne ut løsningene til denne likningen. Vi skriver da inn koeffisientene 1, -6, 11 og -6 i likningen i en vektor p, og bruker deretter "roots" på denne. I Command Window ser dette slik ut:

```
>> clear all
>> p=[ 1 -6 11 -6 ]

p =

     1    -6    11    -6

>> roots(p)

ans =

    3.0000
    2.0000
    1.0000
```

Svaret forteller at røttene er 1, 2 og 3. Vi ser at vi får det samme svaret som i eksemplet.

Det går også an å løse denne likningen symbolsk, men MATLAB bruker lenger tid på det. Måten å gjøre dette på, er slik:

```
>> clear all
>> syms x
solve(x^3 -6*x^2+11*x-6==0)

ans =

 1
 2
 3
```

Uttrykket "syms x" forteller MATLAB at x er en symbolsk størrelse. Legg merke til bruken av dobbelt likhetstegn. Det betyr at vi skal bestemme de x'ene som gjør venstre side lik høyre side, akkurat som når vi regner med blyant og papir. Bruker vi enkelt likhetstegn, betyr likhetstegnet at venstre side "settes lik" det som står på høyre side.

Dersom vi skal løse polynomlikninger, er bruk av "roots" å foretrekke.

7.5 Diagonalisering av matriser

I eksemplene 7.1 og 7.2 regnet vi ut egenverdiene og egenvektorene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Vi fant disse resultatene:

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La oss nå definere matrisen P som den matrisen som har egenvektorene v_1 og v_2 som søyler. De to egenvektorene er lineært uavhengige, så P har en invers. Vi kan bruke standard metode for å regne ut P^{-1}. Vi finner:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Når vi regner ut matrisen $D = P^{-1}AP$ får vi:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi gjør følgende observasjoner:

1. Matrisen $D = P^{-1}AP$ er diagonal
2. Diagonalelementene i $D = P^{-1}AP$ er egenverdiene til A

Det er ingen tilfeldighet at det er sånn. Det viser seg nemlig at når visse betingelser er oppfylt, går det an å bestemme en matrise P som er slik at $D = P^{-1}AP$ blir diagonal. Vi skal se nærmere på dette.

7.5.1 Hvordan diagonalisere en matrise

I innledningen til dette avsnittet så vi at siden søylene i matrisen P er lineært uavhengige egenvektorer til matrisen A, så ble matrisen $D = P^{-1}AP$ en diagonalmatrise med egenverdiene til A langs diagonalen. Hvis vi tar utgangspunkt i uttrykket $P^{-1}AP = D$ kan vi uttrykke A ved hjelp av matrisene P^{-1}, P og D: Det gjør vi ved å multiplisere uttrykket $P^{-1}AP = D$ med P og P^{-1} på hensiktsmessige måter, og utnytte at $PP^{-1} = P^{-1}P = I$, der I er identitetsmatrisen:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= D \\
PP^{-1}AP &= PD \\
PP^{-1}APP^{-1} &= PDP^{-1} \\
IAI &= PDP^{-1} \\
A &= PDP^{-1}
\end{aligned}$$

Vi kan oppfatte uttrykket $P^{-1}AP = D$ som at vi *transformerer* matrisen A over til en diagonalmatrise D ved å multiplisere med matrisene P og P^{-1}. En slik transformasjon kaller vi en **similaritetstransformasjon**. Generelt sier vi at to matriser M og N er **similære** dersom den ene kan transformeres til den andre ved matrisemultiplikasjonen $M = P^{-1}NP$.

▼

Eksempel 7.7

Vis at matrisene vi studerte i innledningen til dette avsnittet, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, er similære ved å regne ut matrisen PDP^{-1}.

Løsning

Vi regner ut matriseproduktet direkte, og bruker de matrisene vi fant i innledningen til dette avsnittet. Vi regner først ut produktet PD og deretter $(PD) \cdot P^{-1}$.

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette viser at A og D er similære siden produktet ble lik matrisen A.

■

Dersom det er mulig å finne en matrise som er slik at matrisen A kan transformeres til en diagonalmatrise D, sier vi at matrisen A er **diagonaliserbar**. Prosessen vi gjør for å få til det, kaller vi **diagonalisering**. Å diagonalisere en matrise vil si å bestemme en invertibel matrise P slik at $P^{-1}AP = D$.

7.5.2 Hva skal til for å kunne diagonalisere en matrise?

I forrige avsnitt så vi at vi kunne diagonalisere en matrise A ved å multiplisere matrisen med to passende matriser, P og P^{-1}. Matrisen P hadde søyler som var egenvektorer til A. Spørsmålet blir om dette alltid gjelder. For å svare på det, skriver vi opp noen setninger som vi kan bruke for å avgjøre om en matrise er diagonaliserbar. Vi skal ikke bevise setningene, men bruke resultatene av dem.

Setning 7.3

1. En $n \times n$-matrise er diagonaliserbar hvis, og bare hvis, den har n lineært uavhengige egenvektorer.
2. Hvis en $n \times n$-matrise har n forskjellige egenverdier, er matrisen diagonaliserbar.
3. Hvis egenverdiene $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_k$ alle er forskjellige, er egenvektorene $v_1,\ v_2,\ \ldots, v_k$ som hører til disse egenverdiene lineært uavhengige.

I avsnitt 7.5.6 skal vi gi noen kommentarer til punkt 2 i setning 7.3.

▼

Eksempel 7.8

Forklar hvorfor det er mulig å diagonalisere matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Løsning

Matrisen er øvre traingulær. Da står egenverdiene langs diagonalen. Egenverdiene er 1, 2 og 3, og vi ser at de er forskjellige. I følge setning 2 er da matrisen diagonaliserbar.

■

Det viktige kravet i rammen er setning 1. Den forteller at de n egenvektorene *må* være lineært uavhengige for at vi skal kunne diagonalisere matrisen, og at det *bare* er når de er det, at det er mulig å diagonalisere.

Vi oppsummerer de resultatene vi har fått:

1. Hvis en $n \times n$-matrise er diagonliserbar, har matrisen n lineært uavhengige egenvektorer.
2. Hvis en $n \times n$-matrise har n lineært uavhengige egenvektorer, er den diagonaliserbar.
3. Hvis en $n \times n$-matrise har n forskjellige egenverdier, er matrsien diagonaliserbar.
4. Hvis en $n \times n$-matrise har færre enn n forskjellige egenverdier, *kan* det allikevel hende at det er mulig å diagonalisere matrisen (se avsnitt 7.5.6).

7.5.3 Hva er svaret på oppgaven " Diagonaliser A" ?

Når vi får oppgaven: "Diagonaliser matrisen A, dersom det er mulig", skal vi:

1. Bestemme matrisen P
2. Bestemme matrisen D

Det er altså ikke nødvendig å regne ut den inverse til P, annet enn som kontroll på at vi har regnet riktig når vi regner ut $A = PDP^{-1}$.

I eksempel 7.7 skrev vi opp matrisene P og D for matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
Hvis oppgaven hadde vært: "Diagonaliser matrisen A, dersom det er mulig", ville svaret vi hadde kommet fram til etter en del regning ha vært:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.5.4 Framgangsmåte for å diagonalisere en matrise

Vi går ut fra at $n \times n$-matrisen A *er* diagonaliserbar. For å diagonalisere A går vi fram på følgende måte:

1. Vi bestemmer egenverdiene til A ved å løse likningen $|A - \lambda I| = 0$.
2. Vi bestemmer n lineært uavhengige egenvektorer, hvis det er mulig.
3. Vi lar P være matrisen som har egenvektoren til søyler.
4. Vi konstruerer matrisen D der egenverdiene står langs diagonalen, og slik at egenverdiene står i samme søyle som den tilsvarende egenvektorene i P. Det betyr at

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ og } P = [v_1,\ v_2, \cdots,\ v_n]$$

der λ_1 er egenverdien til v_1 osv.

▼

Eksempel 7.9

Diagonaliser matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, dersom det er mulig.

Løsning

Vi følger framgangsmåten slik den er beskrevet over.

1. Vi bestemmer egenverdiene til A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 3 = 0$$

   Når vi løser denne likningen får vi

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$$

   Siden denne 2×2-matrisen har 2 forskjellige egenverdier, vet vi at matrisen er diagonaliserbar.

2. Vi bestemmer egenvektorene til de to egenverdiene. Det gjør vi ved å løse likningen $(A-\lambda I)v = 0$ for hver av de to egenverdiene. Etter litt arbeid finner vi:

$$\lambda_1 = -1: \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 4: \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Disse egenvektorene er opplagt lineært uavhengige. For å sjekke det ved regning, kan vi sette vektorene opp som søyler i en matrise, og vise at denne matrisen har en determinant som er forskjellig fra null: $|\,[v_1,\ v_2]\,| \neq 0$.

3. Vi bruker egenvektorene til å konstruere matrisen P:

$$P = [\,v_1 \quad v_2\,] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Vi ser at determinanten til P er $|P| = 5$, som forskjellig fra null. Matrisen P er derfor invertibel.

4. Vi bruker egenverdiene til å konstruere matrisen D. Siden vi har skrevet opp egenvektoren v_1 i første søyle i P, skriver vi opp λ_1 i første søyle i D. Dette gir:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ved å skrive opp P og D har vi diagonalisert A. Svaret er altså:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

■

7.5.5 Bruk av MATLAB til å diagonalisere matriser

MATLAB-tips 7.2

I avsnitt 6.3.4 så vi hvordan vi kunne regne ut egenverdiene til en matrise ved å bruke MATLAB. La oss gjenta dette her, og diagonalisere matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i eksempel 7.9. For å regne ut både egenverdier og egenvektorer, bruker vi MATLAB-sekvensen [P,D]=eig(A) slik som vist nedenfor:

```
>> clear all
>> A=[ 2 3 ; 2 1 ]

A =

     2     3
     2     1

>> [ P , D ]=eig(A)

P =

    0.8321   -0.7071
    0.5547    0.7071


D =

     4     0
     0    -1
```

MATLAB diagonaliserer altså matrisen A når vi bruker kommandoen [P,D]=eig(A). Svaret vi får gir oss matrisen P, der søylene er egenvektorer. Diagonalmatrisen kalles D, og har egenverdiene til diagonalelementer. Husk at egenvektorene, som er søyler i matrisen V, er *normerte*. Det betyr at de har lengde 1.

7.5.6 Like egenverdier og diagonalisering

Punkt 2 i rammen i setning 7.3 krever en ekstra kommentar. Setningen sier at *hvis* matrisen har like mange forskjellige egenverdier som det er rader og søyler i matrisen, *så* er matrisen diagonaliserbar. Men dette betyr *ikke* at det er umulig å diagonalisere matrisen selv om det færre enn n forskjellige egenverdier. Hvis en $n \times n$-matrise har færre enn n forskjellige egenverdier, kan det allikevel hende at vi kan bestemme n lineært uavhengige egenvektorer. Et eksempel viser dette.

▼

Eksempel 7.10

Diagonaliser matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, hvis det er mulig.

Løsning

Vi følger den samme framgangsmåten som før, og får:

1. Vi løser likningen $|A - \lambda I| = 0$ og finner:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

2. Vi løser likningen $(A - \lambda I)v = 0$ for hver av egenverdiene. Vi finner at $\lambda_1 = 3$ gir egenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La oss se hvordan vi håndterer den "doble" egenverdien $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Vi skal bestemme egenvektor v som er slik at $(A\,v - 2\,I)\,v = 0$. Det gir:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y+z \\ 2x-2y+z \\ 2x-2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her får vi tre like likninger: $2x - 2y + z = 0$. Hver av disse har to frie variable. Vi kan da velge verdier for y og z som gjør at vi får to lineært uavhengige egenvektorer, og som også er lineært uavhengig av egenvektoren v_1.

Dersom vi velger $z_2 = 0,\ y_2 = 1$ får vi $x_2 = 1$. Velger vi $z_3 = 2,\ y_3 = 0$ får vi $x_3 = -1$. Vi har da funnet to nye lineært uavhengige egenvektorer:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Disse tre egenvektorene er lineært uavhengige. Vi kan derfor konstruere matrisen P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matrisen D blir:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi har altså diagonalisert A selv om 3×3-matrisen bare har 2 ulike egenverdier. Diagonaliseringen er:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

■

7.5.7 Å regne ut A^n

Dersom A er en matrise det går an å diagonalisere, er det lett å regne ut A^n. Siden A er diagonaliserbar, kan vi skrive $A = PDP^{-1}$. Da blir:

$$A^2 = A \cdot A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

siden $P^{-1}P = I$.

På tilsvarende måte kan vi vise at $A^3 = PD^3P^{-1}$. Generelt ser vi at:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Siden D er en diagonalmatrise, er det enkelt å regne ut D^n. For en 3×3-matrise får vi for eksempel:

$$D^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix}$$

Dermed ser vi at vi slipper med 2 matrisemultiplikasjoner når vi skal regne ut A^n.

▼

Eksempel 7.11

Matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ kan diagonaliseres slik:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut A^{10}.

Løsning

Vi bruker uttrykket $A^n = PD^nP^{-1}$ og får:

$$
\begin{aligned}
A^{10} = PD^{10}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 1^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3070 & -1023 \\ 6138 & -2045 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

■

Index