Innlevering	DAFE BYFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Fredag 22. januar 2016 14:00
Antall oppgaver:	5

Vi anbefaler at dere regner oppgaver fra boken først. Det er en liste med anbefalte oppgaver på hjemmesiden til kurset.

Vis mellomregningene deres. Bruk gjerne matlab, men utregningene skal også gjøres for hand. Dere kan få hjelp med oppgavene i øvingstimene.

Løsningsforslag

1

Uttrykk følgende komplekse tall både på kartesisk form som $a + bi$ og på polar form som $re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ og $0 \leq \theta < 2\pi$). Svarene skal gis eksakt

a) $23.54 - 23.54i$

b) $(1 - i)^2$

c) $e^{-1+\pi i/6}$

d) $(1 + \sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$

e) $\dfrac{-1 - i}{\sqrt{3} + i}$

LF:

a) Tallet er allerede på kartesisk form. På polar form er tallet gitt ved

$$23.54 \cdot \sqrt{2}e^{i7\pi/4}.$$

b) Vi ganger ut og får $(1 - i)^2 = -2i$. Dette er den kartesiske formen. Vi ser at vinkelen er $-\pi/2$ eller $3\pi/2$ radian (vinkelen skal oppgis mellom 0 og 2π) og lengden er lik 2. På polar form er tallet gitt ved

$$2e^{3\pi i/2}.$$

c) På polarform er tallet gitt ved

$$\frac{1}{e}e^{\pi i/6}.$$

På kartesisk form er tallet gitt ved

$$e^{-1+\pi i/6} = e^{-1}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = \frac{\sqrt{3}}{2e} + \frac{1}{2e}i$$

d) Vi uttrykker begge faktorene på både kartesisk og polar form. Vi har at $(1+\sqrt{3}i) = 2e^{\pi i/3}$ og $e^{3\pi i/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$. På kartesisk form er derfor $(1+\sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$ lik

$$(1+\sqrt{3}i)(-1+i)/\sqrt{2} = (-1-\sqrt{3})/\sqrt{2} + (1-\sqrt{3})i/\sqrt{2}.$$

På polar form er $(1+\sqrt{3}i)e^{3\pi i/4}$ lik

$$2e^{\pi i/3}e^{3\pi i/4} = 2e^{\pi i(1/3+3/4)} = 2e^{13\pi i/12}.$$

e) På kartesisk form er

$$\frac{-1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{-\sqrt{3}-1}{4} + \frac{(1-\sqrt{3})i}{4}$$

Vi beskriver hver av faktorene på polar form og benytter dette til å finne kvotienten. Vi ser at $-1-i = \sqrt{2}e^{5\pi i/4}$ og $\sqrt{3}+i = 2e^{\pi i/6}$. Dette gir at

$$\frac{-1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{5\pi i/4}}{2e^{\pi i/6}} = (\sqrt{2}/2)e^{\pi i(5/4-1/6)} = (1/\sqrt{2})e^{13\pi i/12}.$$

2

Løs følgende likninger over $\mathbb{C}$ (finn løsninger blant de komplekse tallene). Oppgi svarene eksakt.

a) $iz - \sqrt{3} = i$

b) $e^{\pi i/4}z + e^{\pi i/6} = 0$

c) $\dfrac{z-1}{z+1} = i$

d) $z = \dfrac{-\sqrt{3}i - 1}{z}$

e) $z^2 + (1+i)z = -i$

f) $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

LF: Eg har oppgitt svarene på den formen som er enklest tilgjengelig. Om dere har oppgitt dem på en annen form er det helt greit så lenge det er riktige tall (og svaret er oppgitt eksakt og ikke bare som en tilnæremet løsning).

a) Løsningen til likningen $iz - \sqrt{3} = i$. er

$$z = (i+\sqrt{3})/i = 1 - \sqrt{3}i$$

b) Løsningen til likningen $e^{\pi i/4}z + e^{\pi i/6} = 0$ er

$$z = -e^{\pi i/6}/e^{\pi i/4} = e^{\pi i}e^{\pi i(1/6-1/4)} = e^{11\pi i/12}.$$

Lengden til tallet i polar form skal være ikke-negativ. Derfor har vi uttrykt -1 som $e^{\pi i}$, tallet med lengde 1 og vinkel π radian.

c) Likningen $\dfrac{z-1}{z+1} = i$ er ekvalent til $z-1 = i(z+1)$ så fremt $z+1 \neq 0$. Vi ganger ut og samler sammen ledd med z som en faktor på venstre side:

$$z(1-i) = 1+i$$

Derfor er løsningen

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i.$$

d) Løsningen til likningen $z = \dfrac{-\sqrt{3}i-1}{z}$ er det samme som røttene til

$$z^2 = -\sqrt{3}i - 1$$

(siden $z = 0$ ikke er en løsning). For å finne n-røtter er det hensiktsmessig å uttrykke det komplekse taller vi skal ta røttene av på polar form. Vi har at

$$-\sqrt{3}i - 1 = 2e^{4\pi i/3}$$

Vi finner én kvadratrot ved å la lengden være lik kvadratroten av lengden 2 og vinkelen være halvparten av $4\pi/3$. Den andre roten får vi ved å snu fortegnet til den første roten. Løsningene er derfor

$$\sqrt{2}e^{2\pi i/3} \text{ og } \sqrt{2}e^{5\pi i/3}$$

e) Likningen $z^2 + (1+i)z = -i$ er en annengradslikning. Løsningene kan vi finne fra annengradsformelen (kalles også abc-formelen). Det har ikke noe å si hvilke kvadratrot vi velger siden begge benyttes i formelen. Alternativt kan vi også finne løsningene direkte ved å fullføre kvadratet (det er slik annengradsforemelne utledes). La oss benytte annengadsformelen. Likningen $z^2 + (1+i)z + i = 0$ har $a = 1$, $b = 1+i$ og $c = i$. Setter vi dette inn i formelen får vi

$$z = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4\cdot 1\cdot i}}{2\cdot 1} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{2i-4i}}{2} =$$

$$\frac{-(1+i) \pm \sqrt{-2i}}{2} = \frac{-(1+i) \pm (1-i)}{2}$$

Røtten er derfor $-i$ og -1. (Sette gjerne tallene inn i likningen og sjekket at de faktisk er løsninger.)

f) Likningen $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ er ekvivalent til

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = 1$$

(når $z \neq 0$). Løsningen er derfor alle komplekse tall med lengde 1 til origo. Dette er enhetssirkelen i det komplekse plan (med senter i origo). Vi ser at en annengradslikning i z og dens konjugerte derfor kan ha uendelig mange løsninger.

3

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av:
1) irredusible reelle polynomer og
2) lineære komplekse polynomer

a) $x^3 + 3x$

b) $z^6 + 8z^3$

LF: a) Vi har følgende faktorisering over de reelle tall:

$$x^3 + 3x = x(x^2 + 3).$$

Polynomet $x^2 + 3$ er irredusibelt over de reelle tall. Det må være irredusibelt fordi $x^2 + 3 \geq 3$ for alle x, så polynomet kan ikkje være et produkt av to lineære ledd med reelle koeffisienter.

Over de komplekse tall faktoriserer alle polynomer som et produkt av lineære faktorer. Dette er fundamentalteoremet i algebra. Likningen $x^2 + 3 = 0$ har røttene $\pm\sqrt{3}i$. Faktoriseringe over de komplekse tall der derfor gitt ved

$$x^3 + 3x = x(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i).$$

b) Vi har faktoriseringen $z^6 + 8z^3 = z^3(z^3 + 8)$. Vi ser (kanskje?) at -2 er en rot. Derfor er $z + 2$ en faktor. Polynomdivisjon gir følgende faktorisering

$$z^3(z + 2)(z^2 - 2z + 4).$$

Fullføring av kvadratet gir at $z^2 - 2z + 4 = (z - 1)^2 + 3 \geq 3$ for alle reelle z. Derfor er faktoriseringen over de reelle tall gitt ved

$$z^3(z + 2)(z^2 - 2z + 4).$$

Røttene til

$$z^2 - 2z + 4 = (z - 1)^2 + 3 = 0$$

er $z = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Over de komplekse tall er derfor faktoriseringen gitt ved

$$z^6 + 8z^3 = z^3(z + 2)(z - 1 - \sqrt{3}i)(z - 1 + \sqrt{3}i)$$

Alternativt kan vi finne røttene til $z^3 + 8 = 0$ og benytte dem til å faktorisere uttrykket. En rot har lengde $\sqrt[3]{8} = 2$ og vinkel $\pi/3$. De andre røttene finner vi ved å gange med 3-røtter av enhetselementet. Det er $1, e^{2\pi i/3}$ og $e^{4\pi i/3}$. Dette gir

$$z^6 + 8z^3 = z^3(z + 2)(z - 2e^{\pi i/3})(z - 2e^{-\pi i/3})$$

Resultatet er selvsagt det samme som ovenfor.

4

Løs likningene

a) $(1+i)z = (1-i)$

b) $6z - i = 2i(3-3iz)$

c) $(1-2z)(2-3i) = (3-i)z$

d) $(2-i)z = 3 - 2z(1+i)$

LF: a) Vi deler med $(1+i)$ på begger sider av likhetstegnet og får

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \underline{-i}$$

b) Vi ganger ut parentesene og samler sammen ledd som har en faktor z.

$$6z - i = 6i + 6z$$

$$6z - 6z = 6i + i = 7i$$

$$0 = 0 \cdot z = 7i$$

Denne påstanden er aldri sann for noen z. Løsningsmengden er derfor tom.

c)

$$(1-2z)(2-3i) = (3-i)z$$

$$(2-3i) - (4-6i)z = (3-i)z$$

$$(2-3i) = (3-i)z + (4-6i)z = (7-7i)z$$

$$z = \frac{2-3i}{7(1-i)} = \frac{(2-3i)}{7(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$z = \frac{(2-3i)(1+i)}{7 \cdot 2} = \frac{2+3+2i-3i}{14}$$

$$z = \frac{5-i}{14} = \underline{\frac{5}{14} - \frac{1}{14}i}$$

d)

$$(2-i)z = 3 - 2z(1+i)$$

$$z(2-i+2(1+i)) = 3$$

$$z(4+i) = 3$$

$$z = \frac{3}{4+i} = \frac{3}{(4+i)}\frac{(4-i)}{(4-i)} = \frac{3(4-i)}{4^2+1} = \underline{\frac{12}{17} - \frac{3}{17}i}$$

5

a) En ikke helt uvanlig feil er å påstå at inversen til en sum $a + b$ er lik summen av inversen til a og b. Vis at dette faktisk aldri er sant for noen reelle tall. Med andre ord, vis at for reelle tall a og b (slik at $a \neq 0$, $b \neq 0$ og $a + b \neq 0$) så er alltid
$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

b) Beskriv alle komplekse tallpar a og b slik at
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
er sant (Det finnes uendelig mange slike tallpar).

Hint: Sammenhengen mellom a og b kan for eksempel uttrykkes som en annengradslikning i a med koeffisienter i b.

LF: Vi gjør deloppgavene samtidig. Vi går systematisk til verks og sammenlikner brøkene i likningen ved å finne felles nevner.

Likningen
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
er ekvivalent til likningen
$$\frac{ab}{ab(a+b)} = \frac{b(a+b)}{ab(a+b)} + \frac{a(a+b)}{ab(a+b)}$$
Dette er sant hvis og bare hvis
$$ab = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
under forutsetting at a, b og $a + b$ er ulik null. Likningen er ekvivalent til
$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$
Vi kan nå tenke på dette som en annengradslikning i variabelen a med koeffisienter uttrykt i b. (Eller omvendt selvsagt.)

Fullfører vi kvadratet (eller benytter annengradsformelen...) får vi
$$(a + b/2)^2 - (b/2)^2 + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4 = 0$$
Fra dette ser vi at det er ingen reelle tall (husk de må være ulik 0) som gjør dette sant. Det viser del a). Likningen har ingen reelle løsninger.

Det er derimot noen komplekse løsninger.
$$a + b/2 = \pm\sqrt{3}ib/2$$
Så vi har
$$a = b(-1 \pm \sqrt{3}i)/2 = be^{\pm 2\pi i/3}.$$

Siden a, b og $a + b$ må være ulik null er løsningene alle par av tall z og $ze^{\pi i/3}$ hvor z er ulik 0. Med andre ord løsningen er $(a, b) = (ze^{2\pi i/3}, z)$ og $(a, b) = (ze^{-2\pi i/3}, z)$ for $z \neq 0$.