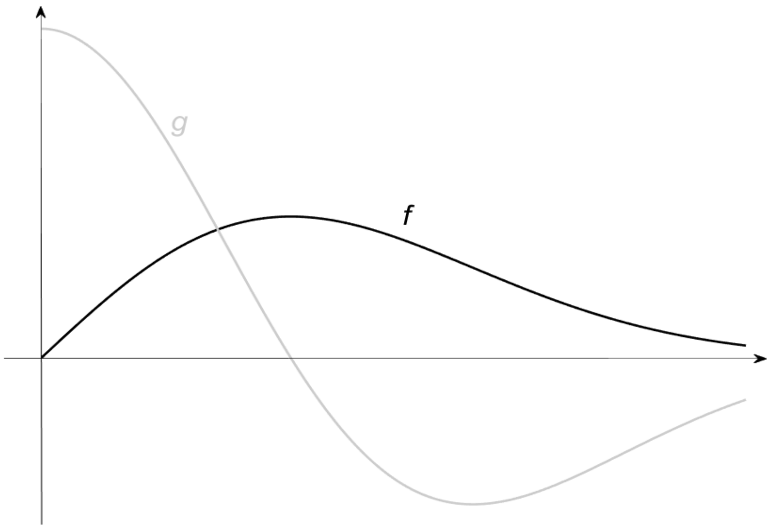
Innlevering	BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 4
Innleveringsfrist	Fredag 11. mars 2016
Antall oppgaver:	$10 + 1$



1

Hvilken av de to funksjonene vist i figuren er den deriverte av den andre? Forklar.

2

Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^2 \sin(x) + \cos(\sin(x)) + \cos(2x)\sin(3x)$

b) $f(x) = \sin(7x + 1)/e^x$

c) $f(x) = x^x$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

3

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ -x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

4

Finn tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - x^2$ som er parallelle til linjen $y = 4x + 1$.

5

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

6

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Innvendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er $3/4$ av høyden til kulen (det vil si $3/2$ ganget med radius til kulen).

7

Finn alle lokale og globale maksimums- og minimumspunkt til funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & -2 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ x^3 - 2x^2 - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

8

Bestem grensene dersom de eksisterer.

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)}$$

b)

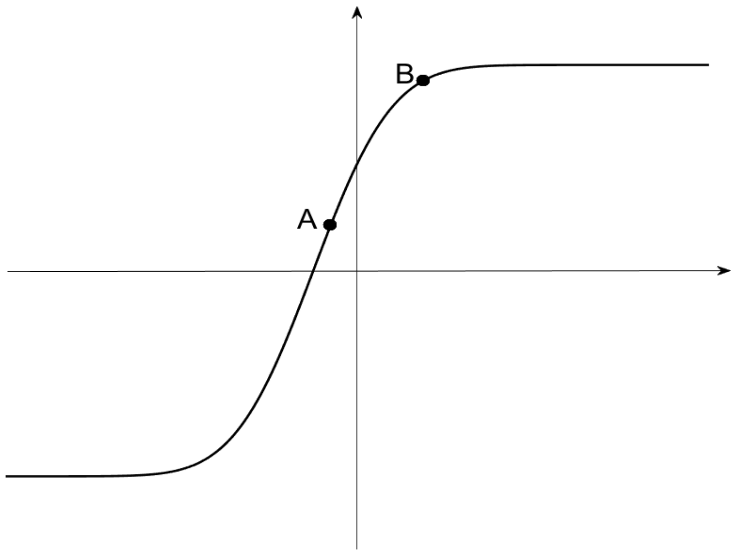
$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1}$$

c)

$$\lim_{x \to -1} \frac{2^x - 1/2}{x^2 - 1}$$

d)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[100]{x}}$$



9

Vi ønsker å bestemme nullpunktet til funksjonen vist over ved Newtons metode. Hvorfor er det lurere å bruke punkt A som startpunkt enn å bruke punkt B? Hva vil skje dersom punkt B velges som startpunkt?

10

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervallet. (Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen og funksjonenes monotoniegenskaper.)

Bruk Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1, \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} - 2, \quad x \geq 0$

c) $x^3 + 2x - 2$, alle x

11

Her skal dere benytte Newtons metode til å lage en kalkulator som regner ut kvadratrøtter. Dette er ganske realistisk i forhold til hvordan lommekalkulatorene faktisk regner ut kvadratrøtter. Vi tar utgangspunkt i funksjonen $f(x) = x^2 - a$. Det positive nullpunktet til $f(x)$ er $\sqrt{a}$ for $a > 0$. (Hvorfor er det et entydig nullpukt for $x \geq 0$?)

a) Vis at Newtons metode gir følgende rekursive formel for estimatet til nullpunktet (når vi starter med en positiv verdi for x)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

b) Start gjerne med $x_0 = a$. Hvor mange iterasjoner ser det ut til at dere behøver for å regne ut kvadratroten med en nøyaktighet på minst 12 siffer? Test gjerne på et enkelt tilfelle, som $a = 4$, slik at det er lett å se hva som skjer. (Dere kan for eksempel lage en løkke i matlab som skriver ut de ulike verdiene til x_n rekursivt.)

c) Lag en matlab funksjon eller et skript som tar inn et tall og som gir ut kvadratroten til tallet (regnet ut ved den rekursive beskrivelsen ovenfor). Kall gjerne funksjonen rot. På hjemmesiden ligger en matlab funksjon som heter rot og som forøvrig regner ut en helt annen funksjon. Dere kan ta utgangspunkt i det skriptet og modifisere det hvis dere ønsker. (Dere trenger ikkje levere inn skriptet dere lager.)