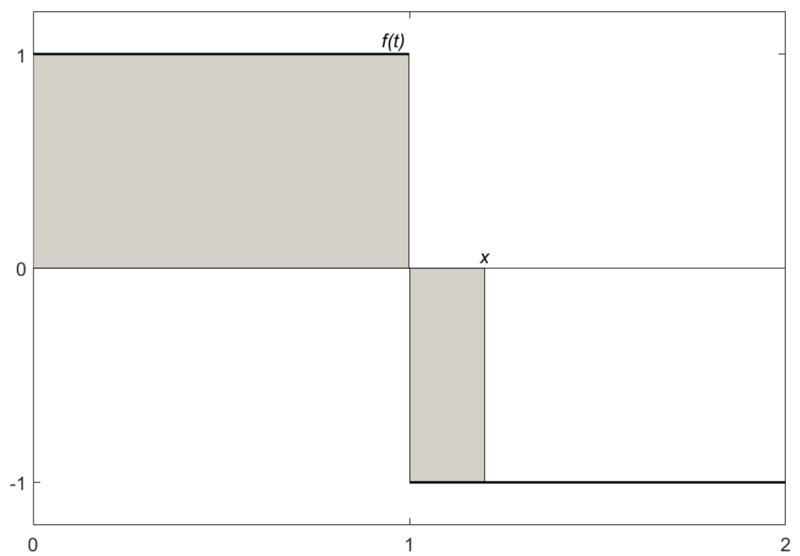
Innlevering	BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 5
Innleveringsfrist	Fredag 15. april 2016 kl 14
Antall oppgaver:	8

1



Funksjonen $f(t)$ er vist i figuren over. Funksjonen $F(x)$ er definert som

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

for $0 \leq x \leq 2$.

a) Bestem $F(0)$, $F(1)$ og $F(2)$.
LF: $F(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$, $F(0) = \int_0^1 f(t)\, dt = 1$ siden dette er arealet av kvadratet med sider med lengde 1. Videre er $F(2) = F(1) + \int_1^2 f(t)\, dt = 1 + (-1) = 0$ siden $\int_1^2 f(t)\, dt$ er det samme arealet med motsatt fortegn (siden f er negativ på $[1, 2]$).

b) Er F kontinuerlig? Er F deriverbar overalt?
LF: Funksjonen f er 1 for x mindre enn 1 og -1 for x større enn 1. Dermed er $F(x) = x$ for x mindre enn 1 og $F(x) = F(1) + \int_1^x (-1)\, dt = 1 - (1 - x) = 2 - x$ for x større enn 1. Dvs F er kontinuerlig for $0 \leq x < 1$ og $1 < x \leq 2$. Vi må sjekke om F er kontinuerlig i $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = 2 - 1 = 1.$$

Dvs $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x)$ og F er kontinuerlig. Analysens fundamentalteorem sier at $F'(x) = f(x)$. Siden f ($=$ den deriverte til F) ikke er kontinuerlig i $x = 1$ er ikke F deriverbar i $x = 1$ (den deriverte eksisterer ikke i $x = 1$).

2

Finn de ubestemte integralene

a)

$$\int (2x - 3 - 4/x)\ dx$$

LF:

$$\int (2x - 3 - 4/x)\ dx = \underline{x^2 - 3x - 4\ln|x| + C}$$

b)

$$\int \left(-2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1}\right) dx$$

LF: Vi utfører polynomdivisjon

$$\int \left(-2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1}\right) dx = \int \left(-2x^{3/5} + \frac{1}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}\right) dx$$

$$= \frac{-2x^{8/5}}{8/5} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{2}\frac{\ln|2x+1|}{2} + C = \underline{\frac{-5x^{8/5}}{4} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{4}\ln|2x+1| + C}$$

c)

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3}\ dx$$

LF: Vi benytter substitusjon med $u = 3x^3$ slik at $dx = du/u'(x) = du/9x^2$:

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3}\ dx = -\pi \int x^2 e^u \frac{du}{9x^2} = \frac{-\pi}{9}e^u + C = \underline{\frac{-\pi}{9}e^{3x^3} + C}$$

d)

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}}\ dt$$

LF: Vi forsøker med substitusjonen $u = 3t+2$. Da er $t = (u-2)/3$ og $dt = du/3$.

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}}\ dt = \int \frac{(u-2)/3}{\sqrt[3]{u}}\frac{1}{3}\ du = \frac{1}{9}\int \left(u^{2/3} - 2u^{-1/3}\right) du$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}u^{5/3} - 3u^{2/3}\right) + C = \underline{\frac{(3t+2)^{5/3}}{15} + \frac{-(3t+2)^{2/3}}{3} + C}$$

3

En beholder er konstruert som rotasjonslegemet om y-aksen av grafen til funksjonen $y = x^{2/3}$ for x mellom 0 og 10. Bestem volumet til en væske som fyller beholderen til en høyde h.

Hint: Endringsraten til volumet med hensyn til høyden dV/dh er gitt ved tverrsnittarealet ved høyde h. Finn et uttrykk for dette som en funksjon av høyden h. Benytt så integrasjon til å finne $V(h)$.

LF: Volumet til væsken ved høyde h er en funksjon $V(h)$. For høyden y mellom 0 og $H = 10^{2/3} \simeq 4.64158$ er endringsraten $V'(y)$ lik det horisontale tverrsnittarealet ved høyde h. Dette arealet er lik pi ganget med radius $x(y)$ kvadrert. Siden $y = x^{2/3}$ så er x uttrykt ved y gitt ved $x = y^{3/2}$. Derfor har vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = \pi(y^{3/2})^2 = \pi y^3$$

Vi kan integrere med hensyn til høyden for å finne $V(h)$. Ved bunnen av beholderen er volumet lik 0 så r $V(0) = 0$. Vi har derfor at

$$V(h) = V(h) - V(0) = \int_0^h \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = \int_0^h \pi y^3\,\mathrm{d}y = \underline{\pi h^4/4}$$

for $0 \leq h \leq 10^{2/3}$.

Alternativt kan volumet til beholderen bestemmes som følger. Volumet som fremkommer ved rotasjon av $y = x^{2/3}$ om y-aksen (mellom $x = 0$ og $x = h^{3/2}$) er ikke volumet til beholderen. Men volumet er lik volumet til sylinderen med radius $h^{3/2}$ og høyde h minus dette volumet:

$$V = \pi\left(h^{3/2}\right)^2 h - 2\pi\int_0^{h^{3/2}} xf(x)\,dx = \pi h^4 - 2\pi\int_0^{h^{3/2}} xx^{2/3}\,dx = \pi h^4 - \frac{3\pi}{4}h^4 = \frac{\pi}{4}h^4.$$

4

I denne oppgaven kan dere benytte numeriske metoder både til å bestemme punktet hvor integranden skifter fortegn og til å evaluere integraler (hvis nødvendig).

a) Estimer nullpunktet til $x^3 - x - 3 = 0$ på intervallet $[0, 2]$.

LF: La $f(x) = x^3 - x - 3$. Da er $f(0) < 0$ og $f(2) > 0$ og det må, pga at f er kontinuerlig, være minst ett nullpunkt på intervallet $[0, 2]$. Det kan vises at det er bare ett nullpunkt. Dette kan bestemmes ved f eks Newtons metode til å være $x^* \approx 1.6717$.

b) Estimer integralet

$$\int_0^2 |x^3 - x - 3|\,dx.$$

LF: Funksjonen $x^3 - x - 3$ skifter fortegn i punktet $x^* \approx 1.6717$. Dermed er

$$\int_0^2 |x^3 - x - 3|\, dx = -\int_0^{x^*} (x^3 - x - 3)\, dx + \int_{x^*}^2 (x^3 - x - 3)\, dx.$$

Disseto integralene kan løses analytisk og vi får:

$$\int_0^2 |x^3 - x - 3|\, dx \approx 4.9200.$$

c) Estimer integralet

$$\int_0^\pi |\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}|\, dx.$$

LF: Samme fremgangsmåte som (a), men integralet må ogsåløses numerisk. Funksjonen $g(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}$ skifter fortegn på intervallet $[0, \pi]$ og har derfor minst ett nullpunkt på dette intervallet. Det kan vises at det bare er ett nullpunkt x^*. Dette kan bestemmes ved bruk av f eks Newtons metode. Vi får $x^* \approx 1.8955$ slik at

$$\int_0^\pi |\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}|\, dx = \int_0^{x^*} (\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2})\, dx - \int_{x^*}^\pi (\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2})\, dx.$$

Følgelig;

$$\int_0^\pi |\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}|\, dx = -\int_0^{x^*} \frac{1}{2}\, dx + \int_{x^*}^\pi \frac{1}{2}\, dx + \int_0^{x^*} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_{x^*}^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

altså

$$\int_0^\pi |\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}|\, dx = \frac{1}{2}(\pi - 2x^*) + \int_0^{x^*} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_{x^*}^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

hvor de to integralene bestemmes f eks ved Simpsons metode slik at

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}|\, dx = &\quad \frac{1}{2}(\pi - 2x^*) + \int_0^{x^*} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_{x^*}^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx \\ \approx &\quad -0.3247 + 1.5555 - 0.2964 = 0.9344.\end{aligned}$$

5

I denne oppgaven kan dere benytte numeriske metoder både til å finne skjæringspunkt og til å evaluere integraler (hvis nødvendig).

a) Bestem arealet avgrenset av grafene til $(x-1)/3$ og $\ln(x)$.
LF: La $f(x) = \ln(x) - (x-1)/3$. Da er $f'(x) = 1/x - 1/3$. Funksjonen er avtagende for $0 < x < 3$ og økende for $x > 3$. Funksjonen er kontinuerlig, den har derfor maksimalt to nullpunkter. Det er opplagt at $x = 1$ er et nullpunkt. Vi benytter Newtons metode (eller halveringsmetoden) til å finne enda et nullpunkt til. Det er tilnærmet lik 6.71144108. Arealet avgrenset av grafene til de to funksjonene er gitt ved integralet av $f(x)$ mellom de to nullpunktene. Det er tilnærmet lik

$$\int_1^{6.71144108} \ln(x) - (x-1)/3\, \mathrm{d}x = x\ln(x) - x - (x-1)^2/6|_1^{6.71144108} =$$

$$6.71144108(\ln(6.71144108) - 1) + 1 + (6.71144108 - 1)^2/6 = \underline{1.62913248\ldots}$$

b) Bestem volumet til legemet som fremkommer ved å rotere om x-aksen regionen avgrenset av grafene til funksjonene e^{x^2} og e^{2x}.
LF: De to grafene skjærer hverandre når $e^{x^2} = e^{2x}$. Dette skjer presis når eksponentene er like $x^2 = 2x$. Så $x = 0$ og $x = 2$. Området avgrenset av grafene er regionen mellom grafene fra $x = 0$ til $x = 2$. I dette området er e^{2x} størst så volumet er lik

$$\pi \int_0^2 (e^{2x})^2 - (e^{x^2})^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$\pi \int_0^2 e^{4x} - e^{2x^2} \, \mathrm{d}x$$

Det finnes ingen elementær funksjon som er antiderivert til (andre leddet i) integranden. Vi benytter numerisk integrasjon og finner at volumet er tilnærmet lik $\underline{1074.3288624}$.

c) Finn buelengden til kurven gitt ved $g(x) = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$. Er svaret du får rimelig?
LF: Buelengden er lik

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$$

Den rette linjen fra start til slutt-punkt har lengde

$$\sqrt{1 + (\sqrt{e^2+1} - \sqrt{2})^2} = 1.78797016.$$

Dette gir et nedre estimat for buelengden.

Nummerisk integrasjon gir (her er Simpsons metode benytta med 10000 delintervaller

$$\underline{L \approx 2.0034971116273}.$$

Eg hadde opprinnelig bare tenkt at denne siste deloppgaven skulle løses numerisk. Men noen av dere har påpekt at det går fint å finne en antiderivert som en elementær funksjon.

Eg viser hvordan man kan finne de antideriverte. Vi benytter en generell a i stede for tallet 2 i eksponenten

$$\int \sqrt{1 + e^{ax}} \, dx$$

Vi benytter substitusjonen $u = 1 + e^{ax}$. Da er $u' = ae^{ax} = a(u - 1)$. Integralet blir omgjort til

$$\int \frac{\sqrt{u}}{a(u-1)} \, du$$

Vi fjerner roten ved å benytte substitusjonen $v = \sqrt{u}$ eller $u = v^2$. Da er $du = 2vdv$ og vi får

$$\int \frac{v}{a(v^2-1)} 2vdv = \int \frac{2v^2}{a(v^2-1)} \, dv =$$

Vi benytter polynomdivisjon samt delbrøksoppspalting

$$\frac{2}{a}\int 1+\frac{1}{v^2-1}\,dv = \frac{2}{a}\int\left(1+1/2\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)\right)\,dv =$$

$$\frac{2}{a}\left(v+1/2\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right)+C$$

Vi uttrykker v ved hjelp av x som $v(x)=\sqrt{1+e^{ax}}$ og får

$$\int\sqrt{1+e^{ax}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{1+e^{ax}}+\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{ax}}-1}{\sqrt{1+e^{ax}}+1}\right|+C$$

6

Finn de bestemte integralene (eksakt).

a)

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjonen $u=x^2+1$. Da er $du=2xdx$.

$$\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int_{u(0)}^{u(2)}\frac{1/2}{\sqrt{u}}\,du=\frac{1}{2}\int_1^5 u^{-1/2}\,du = u^{1/2}|_1^5=\underline{\sqrt{5}-1}$$

b)

$$\int_{-2}^2\left(\sin(x^3)+\cos^2(x)\right)\,dx$$

Hint: Integralet fra $-a$ til a av en odde (integrerbar) funksjon er 0.

LF: Siden $\sin(x^3)$ er en odde (integrerbar) funksjon så er integralet $\int_{-2}^2\sin(x^3)\,dx=0$. Integralet vårt er derfor lik

$$\int_{-2}^2\cos^2(x)\,dx=\int_{-2}^2\frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx=\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{x}{2}\,|_{-2}^2=\underline{\frac{\sin(4)}{2}+2}$$

Her har vi benyttet en trigonometrisk likhet for å skrive om integranden slik at det blir lettere å finne en antiderivert.

c)

$$\int_0^2\ln(x)\,dx$$

LF: Dette er et uegentlig integral. Funksjonen $\ln(x)$ går mot $-\infty$ når x nærmer seg 0 fra positiv side. Integralet er lik

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^2\ln(x)\,dx$$

Delvis integrasjon med $1 \cdot \ln(x)$ hvor u' settes lik 1 og $v = \ln(x)$ gir

$$\int_a^2 \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x|_a^2 = 2\ln(2) - 2 - a\ln(a) + a$$

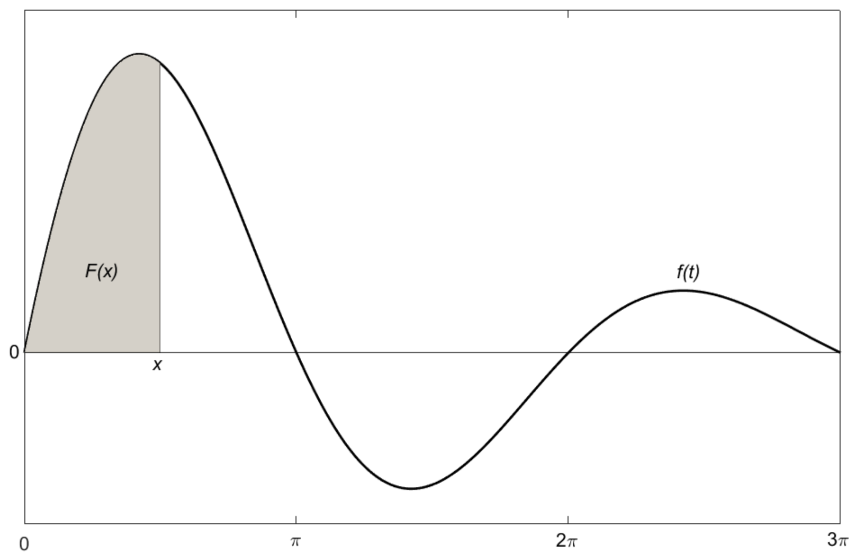
Grensen

$$\lim_{a \to 0^+} a\ln(a) = 0$$

siden $\ln(x)$ går mot $-\infty$ mye saktere enn a går mot 0. Integralet er derfor lik

$$\lim_{a \to 0^+} 2\ln(2) - 2 - a\ln(a) + a = -2(1 - \ln(2)) = -0.6137056\ldots$$

7



Funksjonen $f(t)$ er vist i figuren over. Vi definererer $F(x)$ som $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ for $0 \leq x \leq 3\pi$.

a) Bruk figuren til å bestemme lokale og globale maksimums- og minimumspunkter til F (merk: til F, ikke f) på det angitte intervallet.
LF: Lokale og globale maksimums- og minimumspunkter har vi (1) i randpunkter, (2) i punkter hvor den deriverte er 0, eller (3) i punkter hvor den deriverte ikke eksisterer. I dette tilfellet eksisterer den deriverte $F'(x) = f(x)$ overalt, så vi har ingen punkter av type (3). Det er fire punkter hvor den deriverte $F'(x) = f(x)$ er 0; $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ og $x = 3\pi$, altså er randpunktene inkludert blant disse. Vi kan rangere verdien i disse punktene:

$$0 = F(0) < F(2\pi) < F(3\pi) < F(\pi).$$

Denne rangeringen kommer vi fram til ved å sammenligne arealer under grafen til f på de ulike intervallene. Vi kan konkludere med at vi har et globalt minimum i $x = 0$ og globalt maksimum i $x = \pi$. For $x = 2\pi$ har vi lokalt minimum og for $x = 3\pi$ lokalt maksimum.

b) Funksjonen f som er vist, er $f(t) = e^{-t/4}\sin t$. Bestem $F(x)$.

LF: Dersom $f(t) = e^{-t/4}\sin t$ er $F(x) = \int_0^x e^{-t/4}\sin t\,dt$. Den antideriverte kan bestemmes på to måter: Først observerer vi at $e^{-t/4}\sin t = e^{-t/4}\mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{-t/4+it}\right)$. Dermed er

$$F(x) = \int_0^x e^{-t/4}\sin t\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{t(-1/4+i)}\,dt\right).$$

Integralet inne i parentesen er

$$\int_0^x e^{t(-1/4+i)}\,dt = \left[\frac{1}{-1/4+i}e^{t(-1/4+i)}\right]_0^x = \frac{1}{-1/4+i}\left(e^{x(-1/4+i)} - 1\right).$$

Dvs

$$F(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1/4+i}\left(e^{x(-1/4+i)} - 1\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-1/4-i}{(-1/4)^2+1^2}\left(e^{-x/4}\left(\cos x + i\sin x\right) - 1\right)\right),$$

altså er

$$F(x) = \frac{16}{17}\left(1 + e^{-x/4}\left(-\frac{1}{4}\sin x - \cos x\right)\right).$$

Alternativt kan vi bestemme $F(x)$ ved å bruke delvis integrasjon: Lar vi $u(t) = e^{-t/4}$ og $v'(t) = \sin t$ får vi

$$\int e^{-t/4}\sin t\,dt = -e^{-t/4}\cos t - \frac{1}{4}\int e^{-t/4}\cos t\,dt.$$

Gjør vi det samme med integralet på høyre side får vi

$$\int e^{-t/4}\cos t\,dt = e^{-t/4}\sin t + \frac{1}{4}\int e^{-t/4}\sin t\,dt.$$

Dette gir

$$\int e^{-t/4}\sin t\,dt = -e^{-t/4}\cos t - \frac{1}{4}\left(e^{-t/4}\sin t + \frac{1}{4}\int e^{-t/4}\sin t\,dt\right),$$

dvs en ligning hvor det ønskede integralet er ukjent. Løses denne ligningen og regner ut det tilhørende bestemte integralet får vi

$$\int e^{-t/4}\sin t\,dt = \frac{16}{17}\left(-e^{-t/4}\cos t - \frac{1}{4}e^{-t/4}\sin t\right),$$

slik at

$$F(x) = \frac{16}{17}\left(1 + e^{-x/4}\left(-\frac{1}{4}\sin x - \cos x\right)\right).$$

8

Løs startverdiproblemene.

a)

$$y' - 3y = \cos(x) \qquad y(0) = 1$$

LF : Dette er en første ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Likningen er av orden 1 og det er en randbetingelse.

De homogene løsningene (løsningene til likningen $y' - 3y = 0$) er $y = Ae^{3x}$ for konstanter A. Vi finner nå en partikulær løsning. Det vil være realdelen av en løsning til $y' - 3y = e^{ix}$. Vi forsøker med en funksjon på formen $y = Ke^{ix}$. Setter vi den inn får vi

$$(i-3)Ke^{ix} = e^{ix}$$

Dette gir

$$K = \frac{1}{i-3} = \frac{i+3}{-10} = -\frac{i+3}{10}$$

En partikulær løsning er derfor

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{i+3}{10}(\cos(x) + i\sin(x))\right) = (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Løsnignene er derfor på formen

$$y(x) = Ae^{3x} + (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Vi løser nå randverdiproblemet. Kravet $y(0) = 1$ gir $A - 3/10 = 1$, så $A = 13/10$. Løsningen til randverdiproblemet er

$$\underline{y(x) = (13e^{3x} + -3\cos(x) + \sin(x))/10}$$

b)

$$y'(2x-3) = 4x^2y^2 \qquad y(2) = 1/10$$

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Vi samler faktorer som er funksjoner bare av y på venstre side og faktorer som er funksjoner av x på høyre side av likhetstegnet.

$$\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int \frac{4x^2}{2x-3}\,dx$$

For å gjøre det enklere å løse integralet til høyre utfører vi polynomdivisjon

$$\frac{4x^2}{2x-3} = 2x + 3 + \frac{9}{2x-3}$$

Vi finner de antideriverte og får

$$-\frac{1}{y} = x^2 + 3x + 4.5\ln|2x-3| + C$$

Vi løser randverdiproblemet: Setter vi inn $x = 2$ og $y = 1/10$ får vi

$$-10 = 4 + 6 + 4.5 \cdot \ln 1 + C = 10 + C,$$

så $C = -20$. Løsningen er

$$y(x) = \frac{-1}{x^2 + 3x + 4.5 \ln |2x - 3| - 20}$$

c)

$$y' + 3x^5 = 2x^2 y \qquad y(0) = 2$$

LF: Dette er en førsteordens linær differensiallikning. Vi benytter integrerende faktorer

$$(y' - 2x^2 y)e^{-2x^3/3} = (y \cdot e^{-2x^3/3})' = -3x^5 e^{-2x^3/3}$$

Vi integrerer og får

$$y \cdot e^{-2x^3/3} = \int -3x^5 e^{-2x^3/3}\, dx = \int -3(-3u/2)(-1/2)e^u\, du = -9/4(ue^u - e^u) + C$$

hvor vi har benyttet substitusjonen $u = -2x^3/3$. Den deriverte til u er lik $-2x^2$. Dette gir

$$y = e^{2x^3/3}(-9/4((-2x^3/3)e^{-2x^3/3} - e^{-2x^3/3}) + C) = \underline{3x^3/2 + 9/4 + Ce^{2x^3/3}}$$