Jan Kleppe , rom 1213

Oppfriskningskurs i matte 2005

Dag 1) Algebra , grunnkurs i vgs
2) Polynomer, ligninger, linjer etc
3) Derivasjon
4) Eksponensialfunksjon og logaritme
5) Trigonometri
6) —— " —— og diverse

$\boxed{1}$ Algebra Mandag 8. aug 05

- bokstavregning , brøker
- 2. gradsligning , faktorisering
- fullstendig kvadrat
- ligninger og potenser

kl 9^{00} – 11^{20} , AUD 3 , 3x40 min
kl 11^{50} – 2^{00} , rom 1219

ALGEBRA

Litt om hvorfor bokstavregning er viktig

- formler er gitt ved bokstaver / symboler
- slipper å pugge så mye. EKS

Noen lærer 3 formler for sammenhengen mellom vei (s), fart (v) og tid (t).

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t} \quad , \quad t = \frac{s}{v}$$

Selvsagt unødvendig, nok å kunne én og få de andre ved regning. Faktisk er det nok å bare kunne benevningen for hastighet: m/s eller $km/time$

DEF / NAVN

1) Forholdet mellom tallene a og b er $\frac{a}{b}$ eller $a:b$

2) y og x er proporsjonale $\Longleftrightarrow$ $\frac{y}{x} = k$ (en konst)
(x og y kan variere)

EKS

x	1	1.2	2	2.5	8
y	2	2.4	4	5	16

Her er $\frac{y}{x} = 2$ alltid
dvs. de er prop.

Oppg. 1

Forholdet mellom RenSaft og vann er 1:3. Hvor mye ren saft trengs for å få 10 ℓ ferdig blandet saft?

Oppg. 2

Bremselengden (ℓ) er proporsjonal med kvadratet av farten v, dvs.

ℓ er prop. med v^2

Du får vite at $\ell = 12\,m$ når $v = 40\,km/t$.

Finn ℓ når $v = 60\,km/t$.

LØSN (Oppg. 1)

Kan ta 10 ℓ. og dele med 4, eller

La x = ren saft som trengs. Da vil

$10 - x$ = vann

Gitt
$$\frac{x}{10-x} = \frac{1}{3} \iff$$

$$3x = 10 - x$$
$$4x = 10 \implies x = \frac{10}{4} = \underline{\underline{2.5}} \text{ liter}$$

LØSN. (Oppg. 2)

Gitt
$$\frac{\ell}{v^2} = k \implies \boxed{\ell = k \cdot v^2}$$

Vet $\frac{12}{40^2} = k \quad \left(= \frac{m}{(km/t)^2}\right)$

Når $v = 60\,km/t$, så $\ell = k \cdot v^2 = \frac{12}{40^2} \cdot 60^2 = \underline{\underline{27\,m}}$

BRØKREGLER

$\frac{a}{b}$ Kan gange (eller dele, dvs. forkorte) teller og nevner med samme tall

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)}$$

$\left(\frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} \text{ er lov} \right)$

EKS Forkort (om mulig) brøkene:

a) $\frac{2+x}{3x}$ Kan ikke forkorte fordi det står + her

b) $\frac{2 \cdot x + 3}{5 \cdot x}$ Kan ikke forkorte!

c) $\frac{2 \cdot x^2}{3 \cdot x} = \frac{2 \cdot x \cdot \cancel{x}}{3 \cdot \cancel{x}} = \frac{2x}{3}$

d) $\frac{2x + x^2}{3x} = \frac{(2+x) \cdot \cancel{x}}{3 \cdot \cancel{x}} = \underline{\underline{\frac{2+x}{3}}}$

KONKLUSJON: Lurt å faktorisere!

Følgende gjelder

1) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ (OBS! Felles nevner!)

2) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$

3) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$

$$\boxed{\text{Ingen regel for } \frac{1}{a+b}}$$

Merk

i) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

fordi $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot 1} = \frac{ac}{b}$

ii) 3) kan skrives slik:

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{\cancel{\frac{a}{c}} \cdot \cancel{c} \cdot d}{\cancel{\frac{b}{d}} \cdot c \cdot \cancel{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EKS

a) $\frac{2}{x} + \frac{3+x}{x^2} = \frac{2 \cdot x}{x^2} + \frac{3+x}{x^2} = \frac{2x+3+x}{x^2}$

NB! Gjør om til fellesnevner $= \underline{\underline{\frac{3x+3}{x^2}}}$

b) $$\frac{\frac{4}{x-2}}{\frac{2}{x^2-4}} = \frac{4}{x-2} : \frac{2}{x^2-4} = \frac{4}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot (x^2-4)}{(x-2) \cdot 2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{\cancel{(x-2)} \cdot \cancel{2}}$$

$$= \underline{\underline{2(x+2)}}$$

De 3 kvadratsetningene

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\(a+b)\cdot(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

"fordi vi kan gange ut og se at de er riktige"

I brøker, ligninger og mange andre ganger er det lurt å FAKTORISERE mest mulig.

Oppg. Forkort hvis mulig, brøkene

a) $\dfrac{x^2-2x}{x}$ og b) $\dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1}$

LØSN

a) $\dfrac{x^2-2x}{x} = \dfrac{\cancel{x}\cdot(x-2)}{\cancel{x}\cdot 1} = \underline{\underline{x-2}}$

b) $\dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \dfrac{x\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{x}{x-1}}}$

Litt mer om kvadratsetningene:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\(x+2)^2 &= x^2+4x+4\\(x+b)^2 &= x^2+2bx+b^2\end{aligned}$$

. Generelt:

et slikt uttrykk kalles et fullstendig kvadrat

EKS

x^2-6x+9 er et fullstendig kvadrat fordi det er lik $(x-3)^2$

Oppgave Hva må du legge til x^2+12x for å få et fullstendig kvadrat?

SVAR Må legge til $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36$ fordi

$$x^2+12x+36 = (x+6)^2$$

Oppgave Vil løse

$$x^2+12x = 13$$

LØSN. Lager fullstendig kvadrat. Legger til 36

$$x^2+12x+36 = 13+36$$
$$(x+6)^2 = 49$$
$$x+6 = \pm 7$$

dvs $x = \pm 7 - 6 = \begin{cases} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{-13}} \end{cases}$

Hvis vi lager fullstendig kvadrat i én 2-gradslikning

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ \text{Så får vi løsningene (eller røttene)} \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$$

abc-formelen.

EKS Løs

a) $x^2+12x = 13$ b) $2x^2-5x-7=0$

LØSN

a) $x^2+12x-13=0 \Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2-4\cdot(-13)}}{2}$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-12 \pm 14}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{-13}} \end{cases}$$

b) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{14}{4} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \\ \frac{-4}{4} = \underline{\underline{-1}} \end{cases}$$

VIKTIG om FAKTORISERING

Hvis $ax^2 + bx + c = 0$ har røttene x_1 og x_2,

så er

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

(Dette følger fra abc-formelen ved å gange ut)

EKS Faktoriser

a) $x^2 + 12x - 13$ og b) $2x^2 - 5x - 7$

LØSN. a) $x^2 + 12x - 13 = 0$ har røttene 1 og -13

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 12x - 13 = \underline{\underline{(x-1) \cdot (x+13)}}$$

b) $2x^2 - 5x - 7 = 0$ har røttene -1 og $\frac{7}{2}$

$$\Longrightarrow \quad 2x^2 - 5x - 7 = 2(x+1) \cdot (x - \tfrac{7}{2})$$

$$= \underline{\underline{(x+1)(2x-7)}}$$

KONTROLL

$$(x+1) \cdot (2x-7) = 2x^2 - 7x + 2x - 7 = \underline{2x^2 - 5x - 7}$$

Oppgave Forkort

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x-4)} = \underline{\underline{\frac{x+1}{x-4}}}$$

Løsn $x^2 - 5x + 4 = 0$. Røttene $x_1 = 1$ og $x_2 = 4$

Bemerkning

Hvis $x^2 + bx + c = 0$ har røttene x_1 og x_2

så er

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{aligned}}$$

(dette følger også fra abc-formelen)

EKS $x^2 - 5x + 4 = 0$ har røttene

$x_1 = 1$ og $x_2 = 4$ fordi:

$x_1 + x_2 = 5$

$x_1 \cdot x_2 = 4$