Onsdag 10 aug 05

Oppfriskningskurs i matte

Oppg. Forkort om mulig brøken

$$\frac{x^2+x-2}{2x^3-x^2+x-2}$$

LØSN $x^2+x-2=0$. Røttene 1 og -2

$$\Longrightarrow \quad x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

La $P(x) = 2x^3-x^2+x-2$

$P(1) = 2-1+1-2 = 0$

Da går divisjonen $P(x):(x-1)$ opp!

Får

$$
\begin{array}{l}
(2x^3-x^2+x-2):(x-1) = 2x^2+x+2 \\
\underline{-(2x^3-2x^2)} \\
\qquad\qquad x^2+x-2 \\
\qquad\qquad \underline{-(x^2-x)} \\
\qquad\qquad\qquad 2x-2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(2x-2)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2x^3-x^2+x-2}{x-1} = 2x^2+x+2$$

$$\Longrightarrow \quad 2x^3-x^2+x-2 = (x-1)(2x^2+x+2)$$

Får

$$\frac{x^2+x-2}{2x^3-x^2+x-2} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(2x^2+x+2)} = \underline{\underline{\frac{x+2}{2x^2+x+2}}}$$

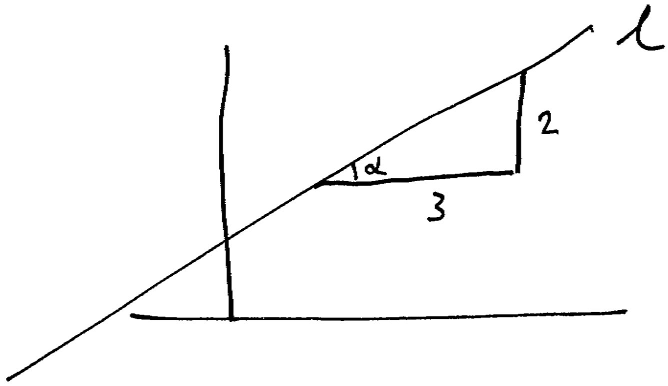
(kan ikke forkorte videre fordi nevner $=0$ har ingen røtter og kan ikke faktoriseres)

DERIVASJON

Husk

stign. tall til l:

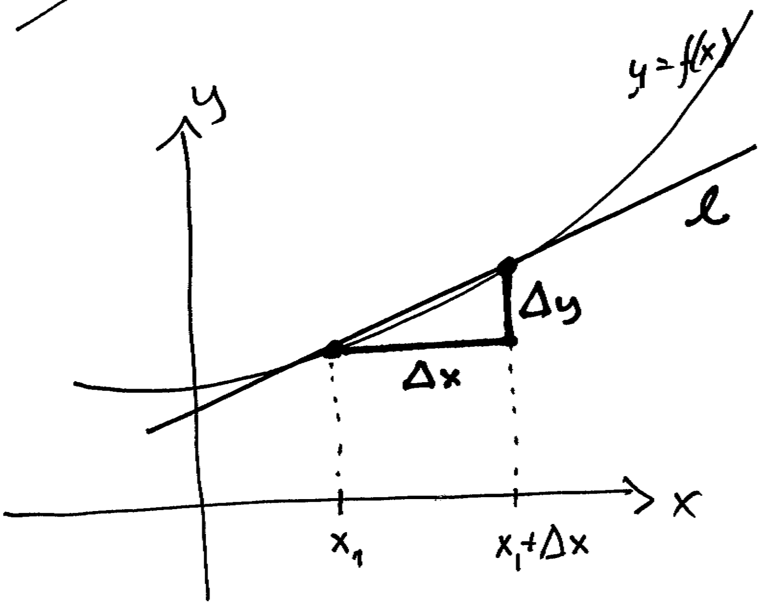
$a = \frac{2}{3}$



Gitt $y = f(x)$

La

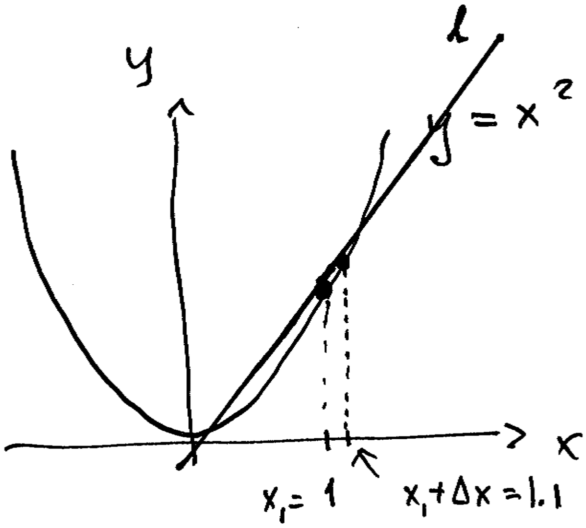
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\ &= \text{forandringen (forskjellen) av } f(x) \text{ i punktene } x_1 \text{ og } x_1 + \Delta x\end{aligned}}$$



Da vil

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{stign. tall til } l$$

EKS Vil finne stign. tallet til l med $\Delta x = 0.1$ på fig



$\Delta y = f(1{,}1) - f(1)$

$1.1^2 - 1^2 =$

$1{,}21 - 1 = 0.21$

Svar $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = \underline{\underline{2.1}}$

Den deriverte til $y = f(x)$ er

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ dvs.} \quad y' = \text{stign. tallet til tangenten}}$$

Vi skriver også $y' = \frac{dy}{dx}$ idet vi tenker oss at Δx og Δy er svært små (og skriver da dx og dy for disse og sløyfer lim)

EKS $y = x^2$. Vet fra før

$y' = 2x$

Når $x = 1$, så er $y' = \underline{\underline{2}}$
(samstemmer godt med forrige eks)

Anvendelser bygger ofte på: La $y = f(t)$ være en funksjon i tiden t

Da vil

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\text{forandring av } y \text{ i perioden } t \text{ til } t+\Delta t}{\Delta t}$$

Får

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \text{forandring av } y \text{ pr. tidsenhet (rate of change)}}$$

Den deriverte måler altså hvor mye/fort y forandres pr. tid. Derfor kalles

y' = veksthastighet = endringshastighet

Derivasjonsregler

Først

$$\boxed{\begin{aligned} (u+v)' &= u'+v' \\ (cu)' &= c\cdot u' \quad , \quad c \text{ et tall} \end{aligned}}$$

Dette følger lett fra definisjonen.

$$\boxed{y = x^n \implies y' = nx^{n-1}}$$

OBS! Denne regelen gjelder også når n ikke er et helt tall. n kan også være negativ.

Begrunnelse: må beregne $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (og da kan vi ikke bruke tall, men må regne med bokstaver). Ta så lim. OK

EKS

a) $y = x^4 \implies y' = \underline{\underline{4x^3}}$

b) $y = 2x^3 + 3x^5 \implies y' = 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 5x^4$

$y' = \underline{\underline{6x^2 + 15x^4}}$

c) $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

(Husk: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$)

og $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$$y' = (-2)\,x^{-2-1} = (-2)\cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^3}}}$$

d) $y = x\cdot\sqrt{x} = x^1\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}}$ (5)

$y = x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

dvs $\underline{\underline{y' = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}}}$

<u>ANM</u>. Får ofte bruk for å derivere $y = \sqrt{x}$. Har

$$\boxed{y = \sqrt{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

fordi:

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$

<u>Oppgave</u> Deriver

a) $y = 2x^7 + x^3$ b) $y = \frac{3}{x^3}$

c) $y = x^2\cdot\sqrt{x}$

<u>LØSN</u> a) $y' = 2\cdot 7x^6 + 3x^2 = \underline{\underline{14x^6 + 3x^2}}$

b) $y = 3x^{-3} \Longrightarrow y' = 3\cdot(-3)x^{-3-1} = -9\cdot x^{-4}$

$= \underline{\underline{\frac{-9}{x^4}}}$

c) $y = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$

$y' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \underline{\underline{\frac{5}{2}x^{3/2}}} = \frac{5}{2}x\cdot\sqrt{x}$

Vi har

$$\boxed{\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}}$$

Produkt- og brøkregel

og

$$\boxed{\begin{aligned} &y = e^x \implies y' = e^x \\ &e = 2.71828\ldots \end{aligned}}$$

EKS

a) $y = x \cdot \sqrt{x}$. Vil bruke produktregelen

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \cdot \cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{x}}}$$

b) $$y = \frac{e^x}{x} \Rightarrow y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2}}}$$

KJERNEREGELEN

$$y = g(f(x))$$

$$\underline{\underline{y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}}$$

Formulert ved hjelpefunksjonen u:

$$y = g(u) \quad \text{der} \quad u = f(x)$$

$$y' = \underline{\underline{g'(u) \cdot u'}}$$

EKS

a) $y = (2x+3)^2 = u^2$ der $u = 2x+3$

$y' = 2u \cdot u' = 2 \cdot (2x+3) \cdot 2 = \underline{\underline{4(2x+3)}}$

Kontroll (uten bruk av kjerneregel)

$y = (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$y' = 4 \cdot 2x + 12 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{4 \cdot (2x+3)}}$

b) $y = (x^2+5)^6 = u^6$ der $u = x^2+5$

$y' = 6u^5 \cdot u' = 6(x^2+5)^5 \cdot 2x = \underline{\underline{12x \cdot (x^2+5)^5}}$

c) $y = e^{3x} = e^u$ der $u = 3x$

$y' = e^u \cdot u' = \underline{\underline{e^{3x} \cdot 3}}$

d) $y = \dfrac{e^{x^2}}{x^3} \Rightarrow$

$$y' = \frac{(e^{x^2})' \cdot x^3 - e^{x^2} \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$y' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x^3 - e^{x^2} \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$y' = \frac{e^{x^2} \cdot \cancel{x^2} \cdot (2x^2 - 3)}{\cancel{x^6}\, x^4} = \underline{\underline{\frac{e^{x^2}(2x^2-3)}{x^4}}}$$

Tangentens ligning

Vet at ligningen for ei rett linje gjennom (x_1, y_1) er:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

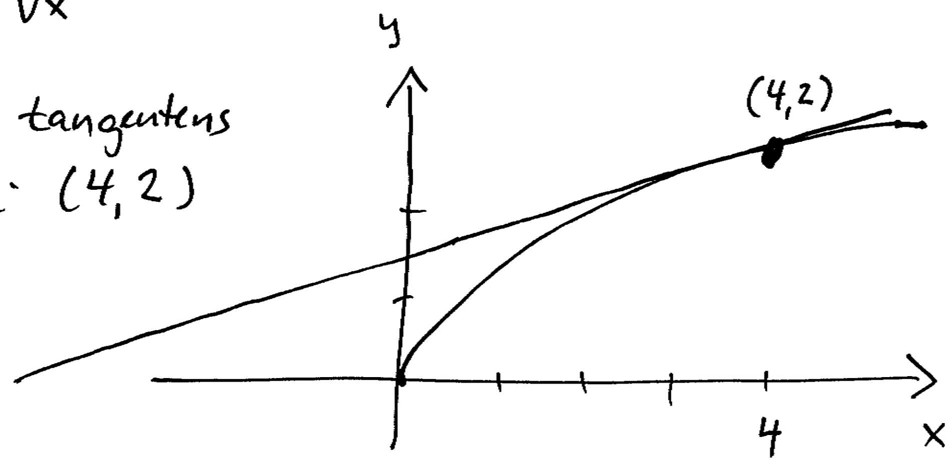
der a = stign. tall. Men $y' = f'(x)$ er stign. tall til tangenten i x. Derfor

Ligning for tangenten til kurven i (x_1, y_1):

$$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)\cdot(x - x_1)}$$

EKS $\quad y = \sqrt{x}$

Skal finne tangentens ligning i $(4, 2)$



$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Når $x = 4$, så er $y' = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Tangent: $\quad y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{1}{4}x - 1$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + 1}}$$

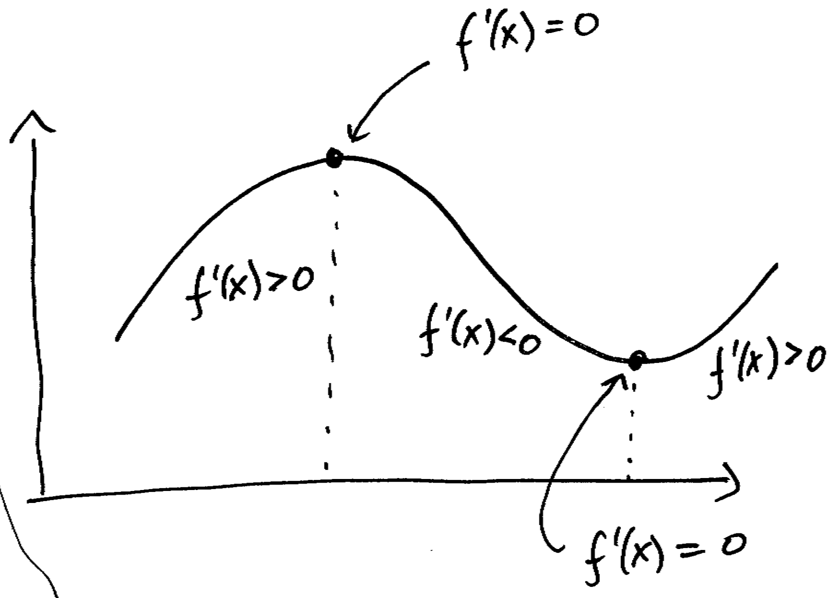
KURVEDRØFTING

bygger på at $f'(x)$ = stign. tall til tangenten i x

$\boxed{f'(x) = 0}$ Tangenten er da horisontal og vi finner eventüelle max./min. pünkter på kürven (ekstremalpünkt vil si max./min.pünkt)

$\boxed{f'(x) > 0}$ Tangenten peker oppover. Grafen stiger (med voksende x). Vi ser at f vokser (er voksende)

$\boxed{f'(x) < 0}$ f avtar (er avtagende)



Konsekvens

$f'(x_1) = 0$

$f'(x) < 0$ for $x < x_1$

$f'(x) > 0$ for $x > x_1$

så er $x = x_1$ et min. pünkt og

$f(x_1)$ = min. verdien

KONKLUSJON Tegner du fortegnsskjema for $f'(x)$, så innser du alt om max. og min. og hvor grafen vokser og avtar.