Torsdag 11.08.05

$\boxed{\text{Eksponensialfunksjon og Logaritmer}}$

Først alle potensreglene $(a>0,\ b>0)$

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & a^x \cdot a^y = a^{x+y} & (4) & a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x \\ (2) & \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & (5) & \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \\ (3) & (a^x)^y = a^{xy} & & \end{array}}$$

NB! Har 5 reglene som har med gange/dele å gjøre, men INGEN REGEL for summer, INGEN regel for

$$a^x + b^x \quad \text{og} \quad (a+b)^x \quad \text{og} \quad a^x + a^y$$

Tillegg: $\boxed{a^0 = 1}$, $\boxed{a^{-q} = \frac{1}{a^q}}$, $\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$ og $\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$

Reglene er helt naturlige f. eks

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}} = a^3 \quad \left(= a^{5-2},\ \text{se } (2)\right)$$

$$(a\cdot b)^3 = a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b = a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b = a^3\cdot b^3$$

se (4)

Tilleggene er naturlige

$$1 = \frac{a^2}{a^2} \underset{(2)}{=} a^{2-2} = a^0 \quad \text{og}$$

$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ (??). Har nemlig

$$\underline{\underline{\frac{1}{a^q}}} = \frac{a^0}{a^q} \underset{(2)}{=} a^{0-q} = \underline{\underline{a^{-q}}} \qquad \underline{(OK)}$$

Hvorfor er $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ og $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$?

For å svare må vi vite hva

$\sqrt{a}$ (og $\sqrt[q]{a}$) er.

Svar $\sqrt{a}$ er det positive tallet som

oppfyller $(\sqrt{a})^2 = a$

Men etter regel (3)

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$$

Får $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

EKS

a) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$

b) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

eller

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8}^{\,2} = \sqrt[3]{2^3}^{\,2} = 2^2 = 4$$

$8 = 2^3$

Oppgave Finn x når $3^x \cdot 4^x = 4 \cdot 6^x$

$(3\cdot 4)^x = 4\cdot 6^x$

$\frac{12^x}{6^x} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^x = 4$

$2^x = 4$, dvs $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

Oppg Regn ut

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}$$

$$a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{4+3-1}{6}} = a^{1} = \underline{\underline{a}}$$

NB! Regel (4) og (5) med $x = \frac{1}{q}$ gir

$$\sqrt[q]{a}\cdot\sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$$

Merk også $\sqrt[q]{a^q} = a^{\frac{q}{q}} = a^1 = a$

EKS Forenkl

a) $\underline{\sqrt{8}} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = \sqrt{2^2\cdot 2} + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2} = \underline{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

(de med strek oppunder er like)

b) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} = \underline{\underline{2\sqrt[3]{2}}}$

Oppgave

a) Er $x\cdot(x+2)$ lik x^2+2x ?

b) Er $x\cdot(x+2)^2$ lik $(x^2+2x)^2$?

c) Er $x\cdot\sqrt{x+2}$ lik $\sqrt{x^2+2x}$?

Er noe feil, hva blir isåfall det riktige uttrykket?

Løs

a) er OK fordi det er lov å gange ut

b) er feil. Rett er

$$x^2 \cdot (x+2)^2 \underset{4}{=} \left(x \cdot (x+2)\right)^2 = \left(x^2+2x\right)^2$$

c) er feil. Rett er:

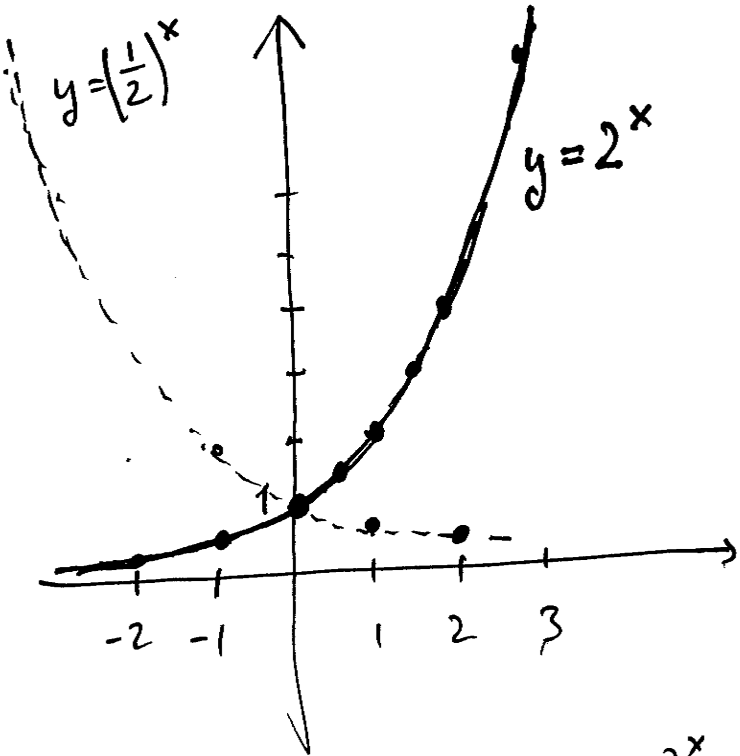
$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x \cdot (x+2)} = \sqrt{x^2+2x}$$

EKSPONENSIALFUNKSJONEN

Starter med $y = 2^x$ og $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tegner grafen til $y = 2^x$ først

x	-2	-1	0	1	2	$1/2$	$3/2$
y	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 1/4$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^{1/2} = \sqrt{2} = 1.4$	$2^{3/2} = \sqrt{2}^3$ 2.8



Vi har

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Så grafen til $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ blir "grafen til $y = 2^x$ speilvendt om y-aksen"

Eksponensialfunksjonen

$y = a^x$ er voksende når $a > 1$ (fig 1)

og avtagende når $0 < a < 1$ (fig 2)

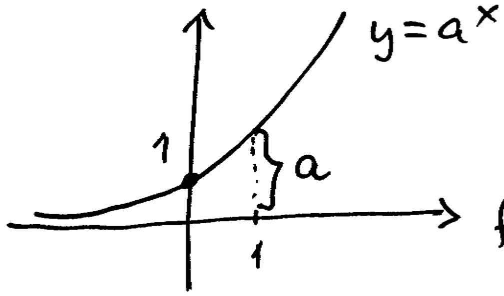


fig 1

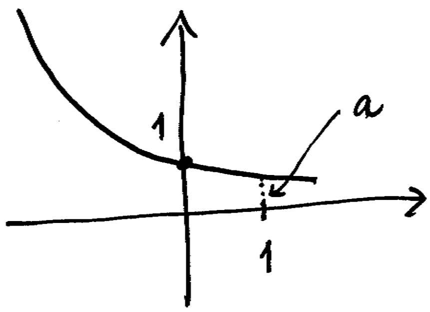


fig 2

Derivasjon

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a^x \implies y' = a^x \cdot \ln a \\ \text{Spesial tilfelle} \\ y = e^x \implies y' = e^x \\ e = 2.71828\ldots \end{array}}$$

EKS

a) $y = 2^x \implies y' = \underline{\underline{2^x \cdot \ln 2}}$

b) $y = 2^{x^2+4x} = 2^u$ der $u = x^2 + 4x$

$$y' = 2^u \cdot \ln 2 \cdot u' = 2^{x^2+4x} \cdot \ln 2 \cdot (2x+4)$$

$$= \underline{\underline{2 \ln 2 \cdot 2^{x^2+4x} \cdot (x+2)}}$$

Eksponsialreglene er de samme som potensreglene (de er effektive for ganging / deling). Men hva vi for addisjon ?

Oppgave Løs ligningen

$$3^x + 3^{1-x} = 4$$

$$3^x + \frac{3^1}{3^x} = 4$$

"Metode" : Finn $u = 3^x$ først, deretter x.

$$u + \frac{3}{u} = 4$$

$$u^2 + 3 = 4u \iff$$

$$u^2 - 4u + 3 = 0$$

abc - formelen gir

$$u = 1 \quad \text{og} \quad u = 3$$

$$\underline{3}^x = 1 = \underline{3}^0 \quad \text{og} \quad \underline{3}^x = 3 = \underline{3}^1$$

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

LOGARITMER

Den Briggske logaritmen lg er definert ved

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 10^x \\ \Updownarrow \\ x = \lg y \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lg 10^x = x \\ \text{og} \\ y = 10^{\lg y} \end{array}}$$

EKS

a) Fordi vi vet $100 = 10^2$

så er

$$\lg 100 = \underline{\underline{2}}$$

b) Da $10^1 = 10$, så er

$$\lg 10 = \underline{\underline{1}}$$

c) Hva er $\lg 3.16$ $(= ?)$

dvs hva er ? i

$$10^? = 3.16$$

EKS Bruken formel

$\lg 100 = \lg 10^2 = \underline{\underline{2}}$

Siden $\sqrt{10} \approx 3.16$ og $\sqrt{10} = 10^{1/2}$, så $\lg 3.16 \approx \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$

Naturlig logaritme er definert ved

$$\boxed{y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y} \Longrightarrow \boxed{\ln e^x = x \text{ og } y = e^{\ln y}}$$

der $e = 2.71828\ldots$

Logaritmeregler (3 + 1 omgjøringsformel)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & \ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v \\ 2) & \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v \\ 3) & \ln(u^x) = x \cdot \ln u \end{array}}$$

Vi har akkurat de samme reglene for lg og dessuten

4 $\boxed{\lg u = \dfrac{\ln u}{\ln 10}}$

NB! Ingen regel for $\ln(u+v)$!!

EKS

a) $\ln 3 + \ln \dfrac{\sqrt{e}}{3} \underset{1}{=} \ln\left(\cancel{3} \cdot \dfrac{\sqrt{e}}{\cancel{3}}\right) = \ln \sqrt{e}$

$= \ln e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$

b) $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2\cdot 5) = \lg 10^1 = \underline{\underline{1}}$

c) $\lg 40 - 2\lg 2 \underset{(3)}{=} \lg 40 - \lg 2^2 = \lg \frac{40}{2^2}$

$\lg 10 = \underline{\underline{1}}$

d) $$\frac{\ln 4 + \ln 18 - \ln 8}{\ln 3} \underset{(1)}{=} \frac{\ln(4\cdot 18) - \ln 8}{\ln 3}$$

$$\underset{(2)}{=} \frac{\ln \frac{\cancel{4}\cdot 18}{\cancel{8}\,2}}{\ln 3} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{\ln(3^2)}{\ln 3}$$

$$= \frac{2\cdot \cancel{\ln 3}}{\cancel{\ln 3}} = \underline{\underline{2}}$$

Oppgave Forenkl

a) $e^{\ln x}$ b) $e^{2\ln x}$ c) $e^{-\ln x}$

SVAR

a) $e^{\ln x} = x$ pr. def.

b) $e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = \underline{\underline{x^2}}$

c) $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$

Derivasjon

$$\boxed{\begin{aligned} y = \ln x &\Rightarrow y' = \frac{1}{x} \\ y = \ln u &\Rightarrow y' = \frac{1}{u}\cdot u' \end{aligned}}$$

EKS

a) $y = \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln u$

der $u = x^2 + 5x + 6$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \underline{\underline{\frac{2x+5}{x^2+5x+6}}}$$