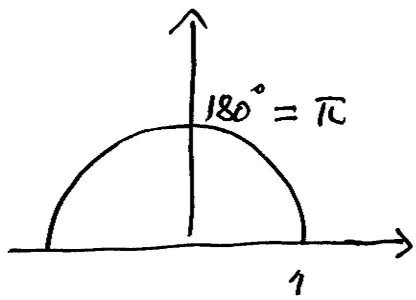
Trigonometri fort. Mandag 15. aug 05

Omgjøring fra grader til radianer:

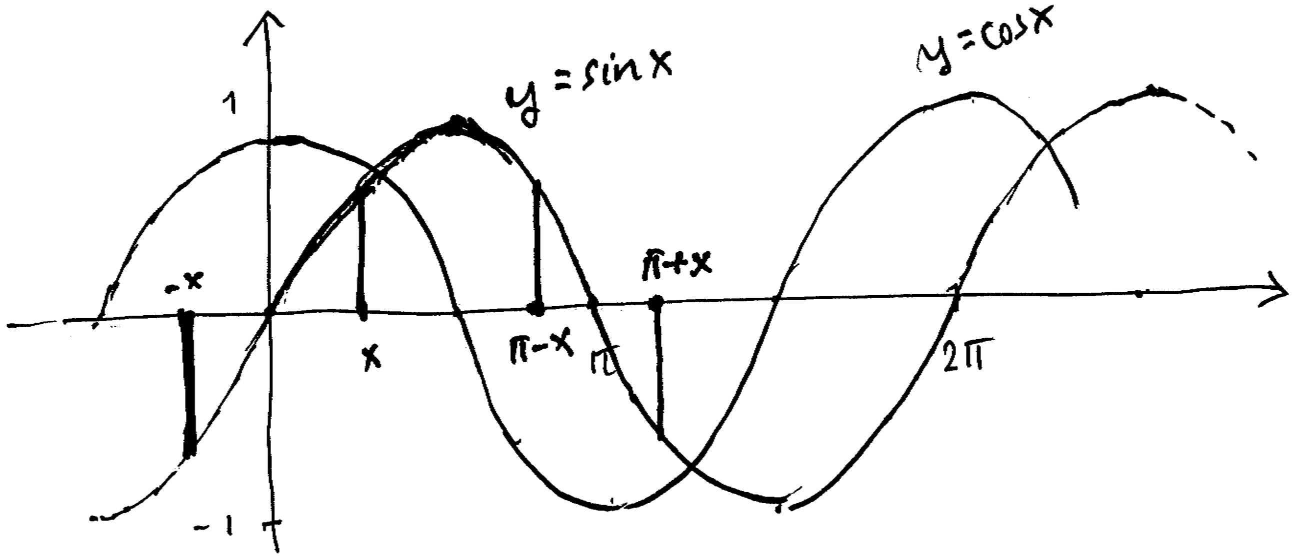
$$\boxed{2\pi = 360^\circ,\ \pi = 180^\circ,\ \frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ \text{ etc}}$$

Når vi måler i radianer, så måler vi altså hvor lang buen i sirkel, med radius 1, er.



buen er π lang

Grafer:



$y = \sin x$ og $y = \cos x$ er periodiske funksjoner med periode 2π.

Grafen til $y = \sin x$ er symmetrisk om origo

Får $\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$

Grafen til $y = \cos x$ er sym. om y-aksen

Får $\boxed{\cos(-x) = \cos x}$

Finner mange opplysninger fra grafene, f.eks

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sin(\pi - x) \\ -\cos x &= \cos(\pi - x) \\ -\sin x &= \sin(\pi + x) \\ -\cos x &= \cos(\pi + x) \end{aligned}}$$

<u>Oppgave</u> Finn de eksakte verdiene av sin, cos og tan til $v = 240°$

<u>LØS</u>

$$\sin 240° = \sin(60° + 180°) = -\sin 60° = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}}$$

$$\cos 240° = \cos(60° + 180°) = -\cos 60° = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\tan 240° = \frac{\sin 240°}{\cos 240°} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

<u>Derivasjon</u>

$$\boxed{\begin{aligned} y = \sin x &\implies y' = \cos x \\ y = \cos x &\implies y' = -\sin x \\ y = \tan x &\implies y' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}}$$

OBS!

x må være i RADIANER

Husk kjerneregel, f.eks

$$y = \sin u \implies y' = \cos u \cdot u'$$
$$y = \tan u \implies y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \quad , u = f(x)$$

EKS

a) $y = \sin 3x = \sin u \quad , u = 3x$

$y' = \cos u \cdot u' = \cos 3x \cdot 3 = \underline{\underline{3\cos 3x}}$

b) $y = \cos x^2 \underset{NB}{=} \cos(x^2) = \cos u \quad , u = x^2$

$y' = -\sin u \cdot u' = \underline{\underline{-2x \sin x^2}}$

c) $y = \cos^2 x \underset{NB!}{=} (\cos x)^2 = u^2 \quad , u = \cos x$

$y' = 2uu' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{-2\sin x \cos x}}$

d) $y = \sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin\sqrt{x} + \cancel{\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}$

$y' = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}}}$

e) $y = \ln(2x) \cdot \tan 3x$

$y' = \frac{1}{\cancel{2}x} \cdot \cancel{2} \cdot \tan 3x + \ln(2x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3$

$= \underline{\underline{\frac{\tan 3x}{x} + \frac{3 \cdot \ln(2x)}{\cos^2(3x)}}}$

$(\ln(2x))' = \frac{1}{\cancel{2}x} \cdot \cancel{2}$

$(\tan 3x)' = \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3$

4

f) $y = \frac{\sin^2 x}{e^{3x}}$

$\sin^2 x = (\sin x)^2 = u^2$

deriv.

$2uu' = 2\sin x \cos x$

$y' = \frac{2\sin x\cos x \cdot e^{3x} - \sin^2 x \cdot e^{3x} \cdot 3}{(e^{3x})^2}$

$(e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3$

$= \frac{\cancel{e^{3x}} \cdot (2\sin x\cos x - \sin^2 x \cdot 3)}{\cancel{e^{3x}} \cdot e^{3x}}$

Vil løse et par trig. ligninger : Husk

Setn. 4 fra forrige gang

(1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(3) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (4) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$(\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x)$

(5), (6) og (7).

Oppgave Løs ligningen

$2\cos^2 x = 1 + \sin x$, $0^\circ \le x < 360^\circ$

$2(1-\sin^2 x) = 1 + \sin x$

$2 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x$

$0 = 2\sin^2 x + \sin x - 1$

Dette er en 2 gradsligning i $u = \sin x$

$(2u^2 + u - 1 = 0)$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$u = \sin x = \frac{1}{2} \implies x = \underline{\underline{30^\circ}} \quad , \quad x = 180^\circ - 30^\circ = \underline{\underline{150^\circ}}$$

$$\sin x = -1 \implies x = 180^\circ - (-90^\circ) = \underline{\underline{270^\circ}}$$

Oppgave Løs

$$3\sin^2 x = \sin x \cos x + 4\cos^2 x \quad , \quad 0^\circ \le x < 360^\circ$$

Husk $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dele med $\cos^2 x$. Får

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} + \frac{4\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}$$

$$3\tan^2 x = \tan x + 4$$

$$3\tan^2 x - \tan x - 4 = 0$$

$$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 3(-4)}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Ta inv. tan

$$x = \underline{\underline{53.1^\circ}} \quad , \quad x = 180^\circ + 53.1^\circ = \underline{\underline{233.1^\circ}}$$

$$x = -45^\circ \quad , \quad x = 180^\circ - 45^\circ = \underline{\underline{135^\circ}} \quad , \quad x = 135^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{315^\circ}}$$

Forelesningsnotater på : iu.hio.no/~jank

Klikk på undervisning / klikk på oppfriskning

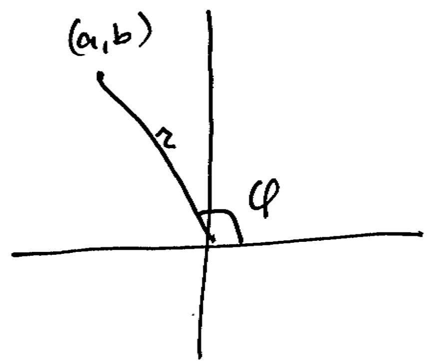
Konsekvens av setn. 3 forrige gang

Uttrykket $a\cos u + b\sin u$ kan skrives på formen

$$\boxed{a\cos u + b\sin u = r\cdot\cos(u-\varphi)}$$

der $r = \sqrt{a^2+b^2}$ og

φ er som på fig, dvs



$\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

Dette resultatet brukes bl.a i forbindelse med harmoniske svingninger og til å løse ligninger

Begr

$$r\cos(u-\varphi) = r\cos u\cos\varphi + r\sin u\sin\varphi$$
$$= \underbrace{r\cos\varphi}_{a}\cdot\cos u + \underbrace{r\sin\varphi}_{b}\sin u = a\cos u + b\sin u$$

OK

Oppg. Vil løse

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$$

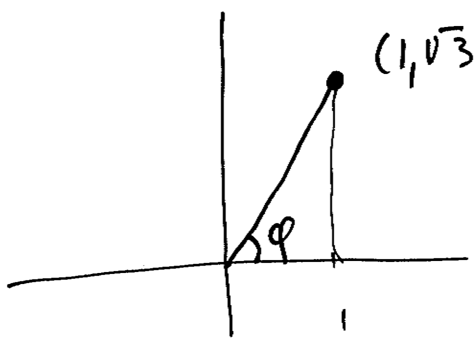
Etter konsekvens : $1\cdot\cos x + \sqrt{3}\sin x = r\cos(x-\varphi)$

der

$$r = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\varphi = 60^\circ$$



Likn. er ekvivalent med

$$2\cos(x-60^\circ) = 1$$

$$\cos(x-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x-60^\circ &= 60^\circ + n\cdot 360^\circ \\ x-60^\circ &= 360^\circ - 60^\circ + n\cdot 360^\circ \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= \underline{\underline{120^\circ + n\cdot 360^\circ}} \\ x &= \underline{\underline{360^\circ + n\cdot 360^\circ}} \end{aligned}$$

<u>Oppgave</u> Finn y når

$$e^{-\ln y + \ln 4} = 2e^{-3\ln x} + 1$$

$$e^{\ln 4 - \ln y} = 2e^{\ln(x^{-3})} + 1$$

$$e^{\ln\frac{4}{y}} = 2e^{\ln(x^{-3})} + 1 \qquad \left(e^{\ln a} = a\right)$$

$$\frac{4}{y} = 2\cdot x^{-3} + 1 = \frac{2}{x^3} + 1$$

$$\frac{4}{y} = \frac{2+x^3}{x^3}$$

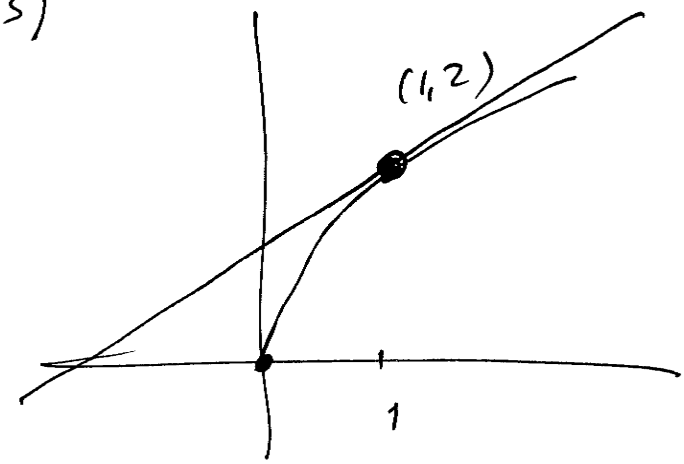
$$\frac{y}{4} = \frac{x^3}{2+x^3} \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{4x^3}{2+x^3}}}$$

Avslutter med litt mer om kurvedrøfting og tangenter.

Oppg 3 (onsd. 12 aug 05)

Tangenten til $y = \sqrt{x^3+3x}$ i $(1,2)$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+3x}} \cdot (3x^2+3)$$



Når $(x,y) = (1,2)$, så

$$y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} \cdot (3+3)$$

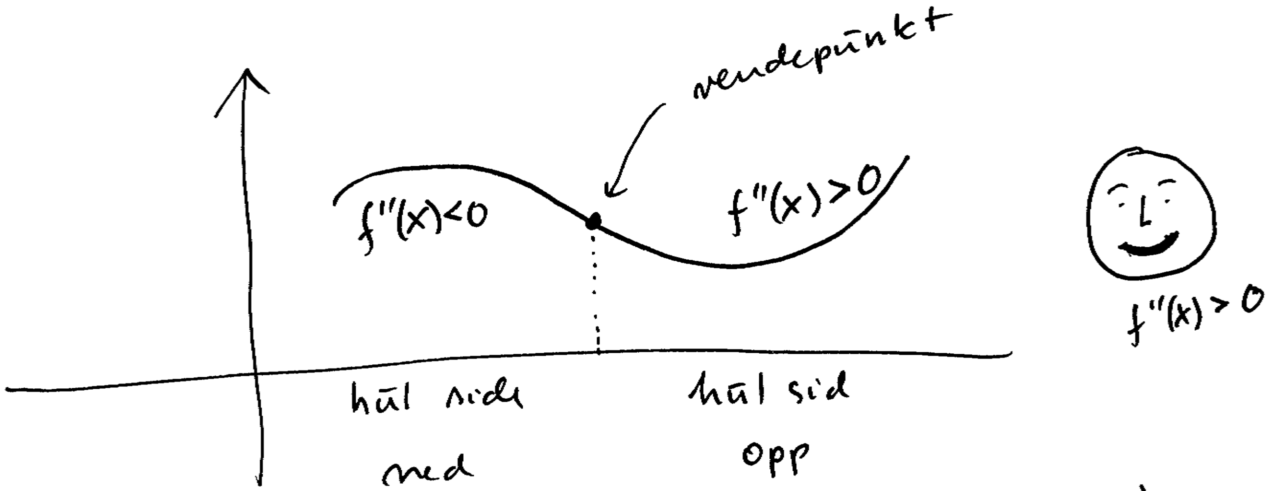
$$y' = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Ligning:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Husk



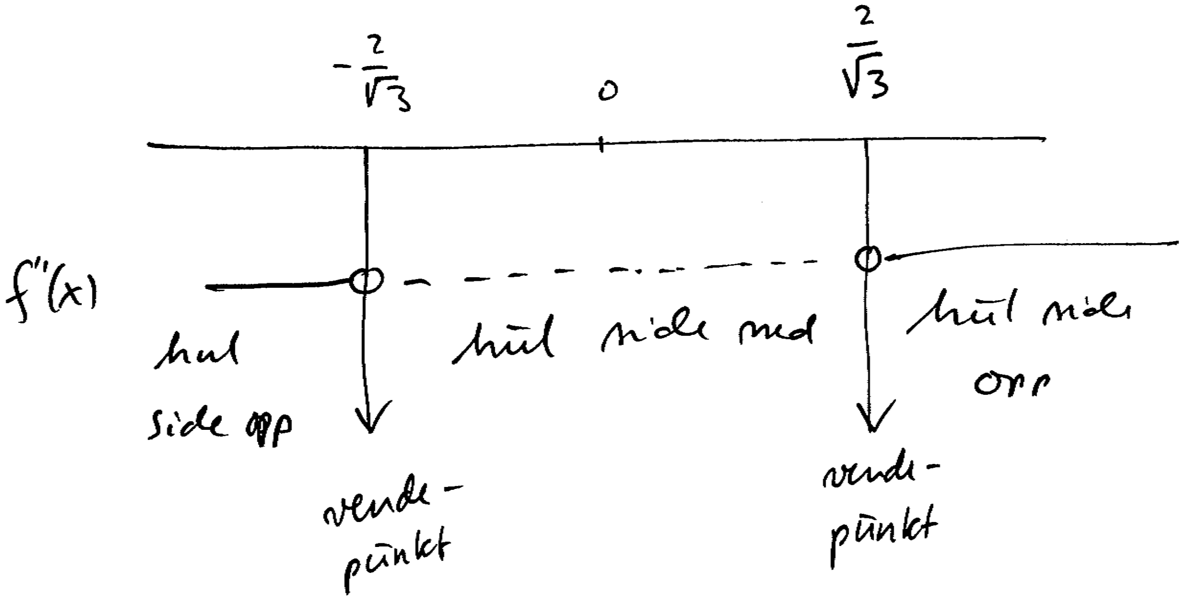
(Vendetangent er tangenten i et vendepunkt)

Oppg 5 (onsd 12 aug 05)

Hul side opp/ned og finn vendepunktene til

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2x$$
$$f'(x) = 4x^3 - 8\cdot 2x + 2$$
$$f''(x) = 4\cdot 3x^2 - 8\cdot 2$$

$$f''(x) = 0 \iff 4\cdot 3x^2 = 8\cdot 2$$
$$x^2 = \frac{{}^{2}\cancel{8}\cdot 2}{\cancel{4}\cdot 3} = \frac{4}{3} \iff \underline{x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}$$



Så grafen har vendepunkt i $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -6.6\right)$ og i $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -11.2\right)$ fordi $f''(x)$ skifter fortegn. Har

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f(1.155) = -6.6$$
$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f(-1.155) = -11.2$$